

図チャレ 第 236 回 (2021 年 5 月)

複素数平面上において、単位円上に異なる 3 点 A, B, C がある。3 直線 BC, CA, AB のいずれの上にもない点 $P(w)$ を考える。P から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足を、それぞれ A', B', C' とする。

ここで、単位円とは原点を中心とする半径 1 の円のことである。また、点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足とは、P を通り ℓ に垂直な直線と ℓ の交点のことである。

(1) $A(\alpha), B(\beta)$ とするとき、直線 AB 上の点 z は

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

を満たすことを示せ。

(2) $A(\alpha), B(\beta), C'(\gamma')$ とするとき、

$$2\gamma' = \alpha + \beta + w - \alpha\beta\bar{w}$$

を示せ。

(3) A', B', C' が一直線上にあるとき、P は単位円周上にあることを示せ。

出典：2021 年 滋賀医科大学

解答

(1) 点 z が直線 AB 上にあるとき

$$\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ は実数}$$

であるから、

$$\frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\bar{z} - \bar{\alpha} = (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1, \quad \beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = 1 \text{ より}$$

$$\bar{z} - \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\alpha\beta} (z - \alpha) = -\frac{1}{\alpha\beta} z + \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} z + \bar{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$\therefore z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(証明おわり)

(2) 点 γ' は直線 AB 上にあるから, (1) より

$$\gamma' + \alpha\beta\overline{\gamma'} = \alpha + \beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

C'P \perp AB より

$$\overline{\left(\frac{w - \gamma'}{\alpha - \beta}\right)} = -\frac{w - \gamma'}{\alpha - \beta}$$

$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1, \beta\overline{\beta} = |\beta|^2 = 1$ より

$$\overline{w - \gamma'} = -(\overline{\alpha} - \overline{\beta})\frac{w - \gamma'}{\alpha - \beta} = -\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\frac{w - \gamma'}{\alpha - \beta} = \frac{w - \gamma'}{\alpha\beta}$$

$$\alpha\beta\overline{w} - \alpha\beta\overline{\gamma'} = w - \gamma'$$

$$\therefore \gamma' - \alpha\beta\overline{\gamma'} = w - \alpha\beta\overline{w} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① + ② より

$$2\gamma' = \alpha + \beta + w - \alpha\beta\overline{w} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(証明おわり)

(3) (2) は $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma' \rightarrow \alpha'$ としても成り立つから

$$2\alpha' = \beta + \gamma + w - \beta\gamma\overline{w} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

④ - ③ より

$$2(\alpha' - \gamma') = \gamma - \alpha + (\alpha\beta - \beta\gamma)\overline{w} = (\alpha - \gamma)(\beta\overline{w} - 1)$$

であり, 同様にして

$$2(\beta' - \gamma') = (\beta - \gamma)(\alpha\overline{w} - 1)$$

も成り立つから

$$\frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta\overline{w} - 1}{\alpha\overline{w} - 1} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

3点 α', β', γ' は一直線上にあるから

$$\overline{\left(\frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'}\right)} = \frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'}$$

であり, ⑤より

$$\frac{\overline{\alpha} - \overline{\gamma}}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}} \cdot \frac{\overline{\beta}w - 1}{\overline{\alpha}w - 1} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta\overline{w} - 1}{\alpha\overline{w} - 1}$$

$\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \overline{\beta} = \frac{1}{\beta}, \overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ より

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta}w - 1\right) \cdot (\beta - \gamma)(\alpha\overline{w} - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\alpha}w - 1\right) \cdot (\alpha - \gamma)(\beta\overline{w} - 1)$$

$$- \frac{1}{\alpha\gamma}\left(\frac{1}{\beta}w - 1\right)(\alpha\overline{w} - 1) = -\frac{1}{\beta\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}w - 1\right)(\beta\overline{w} - 1)$$

$$(w - \beta)(\alpha\overline{w} - 1) = (w - \alpha)(\beta\overline{w} - 1)$$

$$\alpha|w|^2 - w - \alpha\beta\overline{w} + \beta = \beta|w|^2 - w - \alpha\beta\overline{w} + \alpha$$

$$(\alpha - \beta)(|w|^2 - 1) = 0$$

$\alpha - \beta \neq 0$ より

$$|w|^2 - 1 = 0 \quad \therefore |w| = 1$$

よって、点 $P(w)$ は単位円周上にある。

(証明おわり)