

図チャレ 第 237 回 (2021 年 6 月)

$AB = 3$, $BC = 4$, $\angle ABC = 90^\circ$ である四角形 $ABCD$ は, 半径 2 の内接円をもつ。内接円の中心を O , 辺 AB , 辺 BC , 辺 CD , 辺 DA と内接円の接点をそれぞれ P , Q , R , S とするとき, 次の問に答えよ。

(1) BR と内接円の交点を T とするとき, BT を求めよ。

(2) DC を求めよ。

(3) SQ を求めよ。

出典 : 2021 年 三重大学 生物資源学部

解答

(1) BC の長さは内接円の直径に等しく, $\angle ABC = 90^\circ$ であるから

$$\angle BCD = 90^\circ$$

PR も内接円の直径の一つであるから

$$\angle PTR = 90^\circ$$

であり,

$$\triangle BPR \sim \triangle PTR$$

が成り立つから

$$\frac{PR}{BR} = \frac{TR}{PR}$$

直角三角形 BPR において三平方の定理より

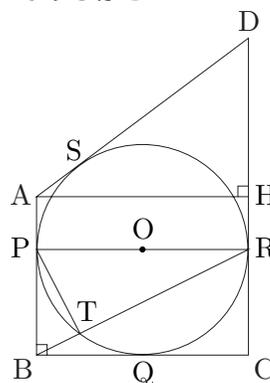
$$BR = \sqrt{BP^2 + PR^2} = 2\sqrt{5}$$

であるから

$$\frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{TR}{4} \quad \therefore TR = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

求める線分の長さは

$$BT = BR - TR = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\text{答})$$



(2) $DR = DS = d$ とおく。

点 A から辺 CD におろした垂線の足を H とすると

$$AP = AS = HR = 1$$

直角三角形 ADH において三平方の定理より

$$AD^2 = AH^2 + DH^2$$

$$(d+1)^2 = 4^2 + (d-1)^2$$

$$4 \cdot d \cdot 1 = 4^2 \quad \therefore d = 4$$

求める線分の長さは

$$DC = DR + RC = 4 + 2 = 6 \quad (\text{答})$$

(3) 直角三角形 AOP と直角三角形 AOS が合同であることを考え、

$$\angle AOP = \angle AOS = \theta$$

とおくと、直角三角形 AOP において

$$\cos \theta = \frac{OP}{OA} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{AP}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2倍角の公式より

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5}$$

点 S から辺 BC におろした垂線の足を K とし、線分 SK と OP の交点を L とすると、直角三角形 OSL において

$$OL = OS \cos 2\theta = 2 \cos 2\theta, \quad SL = OS \sin 2\theta = 2 \sin 2\theta$$

であるから、

$$QK = OL = 2 \cos 2\theta, \quad SK = SL + LK = SL + OQ = 2 \sin 2\theta + 2$$

直角三角形 QSK において三平方の定理より

$$\begin{aligned} SQ &= \sqrt{QK^2 + SK^2} \\ &= 2\sqrt{\cos^2 2\theta + (\sin 2\theta + 1)^2} \\ &= 2\sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta + 2 \sin 2\theta + 1} \\ &= 2\sqrt{2 + 2 \sin 2\theta} = 2\sqrt{2 + 2 \cdot \frac{4}{5}} = 2\sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(別解) (1)の結果と(2)の考察より

$$AS : SD = BT : TR = 1 : 4$$

であるから、

$$ST \parallel AB \parallel CD$$

$\angle OQS = \varphi$ とおくと、 $ST \parallel OQ$ より

$$\angle TSQ = \angle OQS = \varphi$$

円周角の性質より

$$\varphi = \angle TSQ = \angle TRQ = \angle BRQ$$

$\triangle BQR$ において余弦定理より

$$\cos \varphi = \frac{BR^2 + QR^2 - BQ^2}{2 \cdot BR \cdot QR} = \frac{20 + 8 - 2^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

二等辺三角形 OQS において

$$SQ = 2 OQ \cos \varphi = 2 \times 2 \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \quad (\text{答})$$

