

図チャレ 第 238 回 (2021 年 7 月)

$3^x, 4^x, 5^x$ を 3 辺とする三角形が存在するような正の実数 x の範囲を求めよ。

解答

三角形の成立条件は、「任意の辺の長さが残りの 2 辺の長さの和より小さい」ことであるが、 $3^x < 4^x < 5^x$ であるから

$$3^x + 4^x > 5^x$$

が成り立つことと同値である。 $x > 0$ であるから、さらに

$$(3^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} > 5 = (3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}}$$

であることと同値である。

$$f(x) = \log(3^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log(3^x + 4^x) \quad (x > 0)$$

とおくと、

$$f(x) > f(2)$$

を満たすことが条件である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \log(3^x + 4^x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{3^x \log 3 + 4^x \log 4}{3^x + 4^x} \\ &= \frac{x(3^x \log 3 + 4^x \log 4) - (3^x + 4^x) \log(3^x + 4^x)}{x^2(3^x + 4^x)} \\ &= \frac{(3^x \log 3 + 4^x \log 4) - (3^x + 4^x) \log(3^x + 4^x)}{x^2(3^x + 4^x)} \\ &= \frac{3^x \{\log 3 - \log(3^x + 4^x)\} + 4^x \{\log 4 - \log(3^x + 4^x)\}}{x^2(3^x + 4^x)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

より $f(x)$ は減少関数であるから、 $f(x) > f(2)$ となるのは

$$0 < x < 2 \quad (\text{答})$$

のときである。