

図チャレ 第 239 回 (2021 年 8 月)

座標空間において，円 $x^2 + y^2 = 1$ ， $z = 0$ に内接する長方形 A の各辺は座標軸に平行であり， A を底面として縦，横の辺の長さのうち短い方 (A が正方形のときは一辺の長さ) を高さとする直方体を B とする。長方形 A が上記の条件を満たしながら自由に動くとき，直方体 B が通過してできる領域を D とする。

- (1) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$) 上の D の断面積を $S(t)$ とする。 $t = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) とおくととき， $S(t)$ を θ を用いて表せ。
- (2) D の体積 V を求めよ。

解答

- (1) xy 平面上で長方形 A の 4 頂点を $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $(-\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ ， $(\cos \alpha, -\sin \alpha)$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とおくととき，短い方の辺の長さは

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき } 2 \sin \alpha$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } 2 \cos \alpha = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

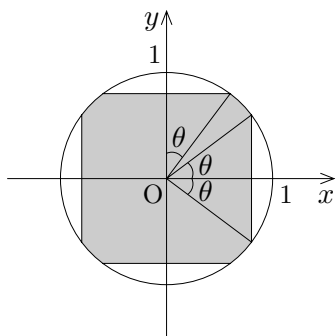
断面 $z = 2 \sin \theta$ 上に長方形 A が現れる範囲を考えると

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき } 2 \sin \alpha \geq 2 \sin \theta$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \geq 2 \sin \theta$$

$$\therefore \theta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \theta$$

したがって，平面 $z = 2 \sin \theta$ による断面は次図のようになる。



断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= 4 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta \right\} \\ &= \pi - 4\theta + 2 \sin 2\theta \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) D の体積は

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} S(t) dt$$

であり, $t = 2 \sin \theta$ により置換積分することにより

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi - 4\theta + 2 \sin 2\theta)(2 \sin \theta)' d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(\pi - 4\theta)(\sin \theta)' + 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta\} d\theta \\ &= 2 \left[(\pi - 4\theta) \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-4) \sin \theta d\theta + 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos^2 \theta)(\cos \theta)' d\theta \\ &= 0 + 8 \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 8 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{3(8 - 4\sqrt{2}) + 8 - 2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{32 - 14\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$