

図チャレ 第240回(2021年9月)

正三角形ABCの辺ABを1:2に内分する点をD, 辺BCを1:3に内分する点をE, 辺CAの中点をFとする。

- (1) 直線ABと直線EFの交点をGとするとき, $AB:BG$ を求めよ。
- (2) 直線BCと直線DFの交点をH, 辺ABの中点をMとするとき, $MG = CH$ であることを示せ。
- (3) $\angle DFE$ を求めよ。

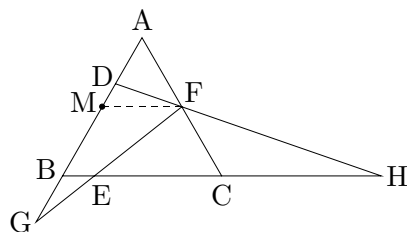
解答

- (1) $\triangle ABC$ と直線FGについてメネラウスの定理より

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AG}{GB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$AG = 3BG$$

$$\therefore AB:BG = 2:1 \quad (\text{答})$$



- (2) $\triangle ABC$ と直線DHについてメネラウスの定理より

$$\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore BH = 2CH$$

$BH = BC + CH$ であるから

$$BC = CH$$

ABの中点をMとすると, (1)の結果とあわせて

$$MG = AB = BC = CH$$

(証明おわり)

- (3) 中点連結定理より

$$MF = \frac{1}{2}BC = CF$$

$\angle FMG = \angle FCH = 120^\circ$ であるから

$$\triangle FMG \equiv \triangle FCH \quad \text{特に } \angle MFG = \angle CFH$$

が成り立つ。

$$MF \parallel CH$$

であるから, 同位角について

$$\angle DFM = \angle FHC$$

以上より

$$\begin{aligned} \angle DFE &= \angle DFM + \angle MFG \\ &= \angle FHC + \angle CFH \\ &= 180^\circ - \angle FCH \\ &= 60^\circ \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) ベクトルを用いて, 機械的な計算で求めることもできる。