

図チャレ 第 241 回 (2021 年 10 月)

a, b を正の実数とする。座標平面上において $O(0, 0)$, $A(2a, b)$, $B(2a, 3b)$ とおく。

(1) $\frac{b}{a} = t$ とおくととき, $\tan \angle AOB$ を t で表せ。

(2) a, b が変化するとき, $\angle AOB$ の最大値を求めよ。

解答

(1) $\tan \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}t$, $\tan \beta = \frac{3b}{2a} = \frac{3}{2}t$ ($0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$) とおくと,
 $\angle AOB = \beta - \alpha$

であり, 加法定理より

$$\tan \angle AOB = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t}{1 + \frac{3}{2}t \cdot \frac{1}{2}t} = \frac{4t}{4 + 3t^2} \quad (\text{答})$$

(2) 相加・相乗平均の不等式より

$$\tan \angle AOB = \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{3}{4}t} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot \frac{3}{4}t}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

となるが, 不等式の等号は

$$\frac{1}{t} = \frac{3}{4}t \quad \text{かつ} \quad t > 0, \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

のとき成り立つから,

$\tan \angle AOB$ の最大値は $\tan 30^\circ$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ では $\tan \theta$ は単調増加であるから

$\angle AOB$ の最大値は 30° (答)