

## 図チャレ 第242回(2021年11月)

$a$  を実数定数とする。実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq ax$  をともに満たすとき、 $\frac{y}{x-2}$  の最大値を求めよ。

解答

まず、点  $(2, 0)$  から円  $x^2 + y^2 = 1$  に引いた接線の接点の座標を求める。

点  $(\cos \theta, \sin \theta)$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  における円  $x^2 + y^2 = 1$  の接線

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

が点  $(2, 0)$  を通るとき、

$$2 \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{接点は} \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

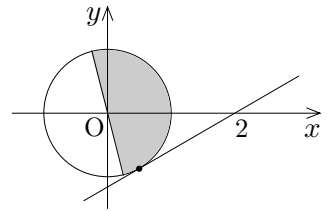
$\frac{y}{x-2}$  は 2 点  $(x, y), (2, 0)$  を結ぶ直線の傾きを表すから、点  $(x, y)$  が領域

$$x^2 + y^2 \leq 1, y \geq ax$$

を動くときの傾き  $\frac{y}{x-2}$  の最大値を求めればよい。

(i)  $a \leq -\sqrt{3}$  のとき

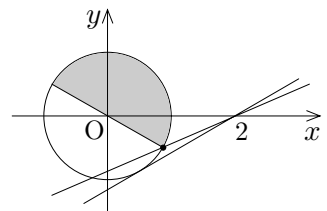
接点  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  において最大値  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  をとる。



(ii)  $-\sqrt{3} \leq a \leq 0$  のとき

$x^2 + y^2 = 1$  と  $y = ax$  の交点  $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

において最大値  $\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} - 2} = \frac{a}{1 - 2\sqrt{a^2+1}}$

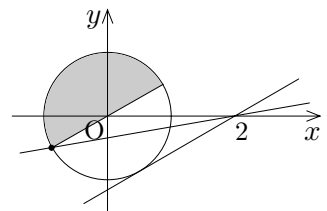


をとる。

(iii)  $a \geq 0$  のとき

$x^2 + y^2 = 1$  と  $y = ax$  の交点  $\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

において最大値  $\frac{\frac{-a}{\sqrt{a^2+1}}}{\frac{-1}{\sqrt{a^2+1}} - 2} = \frac{a}{1 + 2\sqrt{a^2+1}}$



をとる。

以上をまとめて、傾き  $\frac{y}{x-2}$  の最大値は

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \leq -\sqrt{3} \text{ のとき} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3} \leq a \leq 0 \text{ のとき} & \frac{a}{1-2\sqrt{a^2+1}} \\ a \geq 0 \text{ のとき} & \frac{a}{1+2\sqrt{a^2+1}} \end{array} \right. \quad (\text{答})$$

(注) 今回は、表向きの表現は図形問題ではないが、解答者が図形を用いて解くことになるという意味で図形問題である。