

図チャレ 第 243 回 (2021 年 12 月)

三角形 ABC の各辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。

(1) $\angle C$ が直角であるとき, 頂点 C から辺 AB におろした垂線の長さを h とするとき,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $a^k + b^k = c^k$ ($k > 2$) であるとき, 次の等式を成り立たせるような点 D が線分 AB 上に存在することを示せ。

$$\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} = \frac{1}{d^k} \quad (d \text{ は線分 CD の長さ})$$

解答

(1) 三平方の定理より

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

三角形 ABC の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より c を消去すると

$$b^2 + a^2 = \left(\frac{ab}{h}\right)^2$$

両辺を a^2b^2 で割ると

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2} \quad (\text{証明おわり})$$

(2) $a^k + b^k = c^k \quad \dots\dots \textcircled{3}$

のとき

$$\frac{1}{b^k} + \frac{1}{a^k} = \left(\frac{c}{ab}\right)^k$$

であるから,

$$d = \frac{ab}{c} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

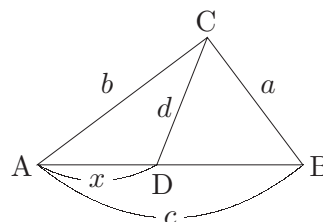
とおくと $\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} = \frac{1}{d^k}$ が成り立つ。

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

AD = x とおくと, $\triangle ADC$ において余弦定理より

$$d^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$$cx^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c(b^2 - d^2) = 0$$

④より

$$cx^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + b^2c\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$0 < x < c$ の範囲に⑤を満たす実数 x が存在することを示せばよい。

$$f(x) = cx^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + b^2c\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)$$

とおくと、③より $a < c$, $b < c$ であるから

$$0 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} < c$$

であり、

$$f(0) = b^2c\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) > 0$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) &= c\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2c} + b^2c\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4c}(b^2 + c^2 + a^2)^2 + \frac{b^2(c^2 - a^2)}{c} \\ &= \frac{-(b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4b^2(c^2 - a^2)}{4c} \\ &= \frac{-(b^2 - c^2 + a^2)^2}{4c} < 0 \quad (k \neq 2 \text{ より } a^2 + b^2 \neq c^2) \end{aligned}$$

$$f(c) = a^2c\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) < 0$$

であるから、2次方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ と $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} < x < c$ の範囲に解をもつ。よって、条件を満たす点 D が存在することが示された。

(おわり)

(注) 本問は存在を示せばよいだけであるが、2次方程式 $f(x) = 0$ は容易に解くことができる。

$$\begin{aligned} f(x) &= c\left(x - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 + f\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \\ &= c\left(x - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 - \frac{(b^2 - c^2 + a^2)^2}{4c} = 0 \\ \left(x - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 &= \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right)^2 \\ x - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} &= \pm \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2c} \\ \therefore x &= \frac{b^2}{c}, \frac{c^2 - a^2}{c} \end{aligned}$$