

## 図チャレ 第 245 回 (2022 年 2 月)

曲線  $x^2 + y^2 = 100$  ( $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$ ) を  $C$  とする。点  $P, Q$  は  $C$  上にあり、線分  $PQ$  の中点を  $R$  とする。ただし、点  $P$  と点  $Q$  が一致するときは、点  $R$  は点  $P$  に等しいものとする。

- (1) 点  $P$  の座標が  $(6, 8)$  であり、点  $Q$  が  $C$  上を動くとき、点  $R$  の軌跡は、

$$(x - \boxed{\text{キ}})^2 + (y - \boxed{\text{ク}})^2 = \boxed{\text{ケ}}, \quad \boxed{\text{コ}} \leq x \leq \boxed{\text{サ}}, \quad \boxed{\text{シ}} \leq y \leq \boxed{\text{ス}}$$

である。

- (2) 点  $P, Q$  が  $C$  上を自由に動くとき、点  $R$  の動く範囲の面積は、

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi + \boxed{\text{タ}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}$  はできるだけ小さな自然数で答えること。

出典：2012 年 早稲田大学 人間科学科

### 解答

- (1)  $P(6, 8)$  のとき、点  $P$  を中心として  $C$  を  $\frac{1}{2}$  倍に相似変換したものが点  $R$  の軌跡である。 $C$  を含む円  $x^2 + y^2 = 100$  全体を点  $Q$  が動くとき、点  $R$  は  $OP$  を直径とする円を描くことになるから、題意の点  $R$  の軌跡を式で表すと

$$(x - \underset{\text{(キ)}}{\boxed{3}})^2 + (y - \underset{\text{(ク)}}{\boxed{4}})^2 = \underset{\text{(ケ)}}{\boxed{25}}, \quad \underset{\text{(コ)}}{\boxed{3}} \leq x \leq \underset{\text{(サ)}}{\boxed{8}}, \quad \underset{\text{(シ)}}{\boxed{4}} \leq y \leq \underset{\text{(ス)}}{\boxed{9}}$$

となる。

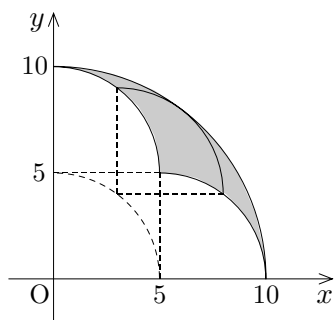
- (2)  $P(10 \cos \theta, 10 \sin \theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

を固定して点  $Q$  を動かすと、(1)と同様に考えて、点  $R$  の軌跡は四分円

$$(x - 5 \cos \theta)^2 + (y - 5 \sin \theta)^2 = 25, \quad x \geq 5 \cos \theta, \quad y \geq 5 \sin \theta$$

となる。

次に、 $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で動かすことにより、点  $R$  の動く範囲は次図の網目部分のようになる。



この範囲の面積は

$$10^2 \pi \times \frac{1}{4} - 5^2 - 5^2 \pi \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{\boxed{25}}{\boxed{2}} \pi + \frac{\boxed{-25}}{\boxed{2}}$$