

図チャレ 第 246 回 (2022 年 3 月)

正の実数 t に対し, 座標平面上の 2 点 $P(0, t)$ と $Q\left(\frac{1}{t}, 0\right)$ を考える. t が $1 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき, 座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ.

出典: 2022 年 大阪大学

解答

線分 PQ は

$$tx + \frac{y}{t} = 1 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y \geq 0$$

と表され, 2 次方程式

$$xt^2 - t + y = 0$$

が $1 \leq t \leq 2$ の範囲に解をもつような点 (x, y) の集合が直線 PQ が通過してできる領域であり, $x \geq 0, y \geq 0$ の部分だけ切り取ったものが求める図形である。

$$f(t) = xt^2 - t + y$$

とおくと, $x > 0$ のとき

$$f(t) = x\left(t^2 - \frac{1}{x}t\right) + y = x\left(t - \frac{1}{2x}\right)^2 - \frac{1}{4x} + y$$

1° $f(1)f(2) \leq 0$ のとき

tu 平面上で $u = f(t)$ のグラフと t 軸 ($u = 0$) は $1 \leq t \leq 2$ で共有点をもつから条件を満たし,

$$f(1)f(2) = (x + y - 1)(4x + y - 2) \leq 0$$

2° $f(1)f(2) > 0$ のとき

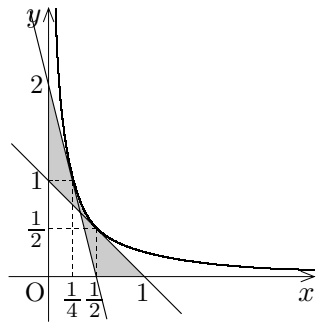
$x > 0$ が必要であり, 2 解がともに $1 < t < 2$ の範囲にあることが条件であるから,

$$\begin{cases} -\frac{1}{4x} + y \leq 0 \\ f(1) = x + y - 1 > 0 \\ f(2) = 4x + y - 2 > 0 \\ 1 < \frac{1}{2x} < 2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y \leq \frac{1}{4x} \\ y > -x + 1 \\ y > -4x + 2 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4x} - (-4x + 2) = \frac{1 - 2 \cdot 4x + (4x)^2}{4x} = \frac{(4x - 1)^2}{4x}$$

$$\frac{1}{4x} - (-x + 1) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x} = \frac{(2x - 1)^2}{4x}$$

であることにも注意して, 1° または 2° より, 線分 PQ が通過する部分は次図の網目部分(境界も含む)である。



(答)