

図チャレ 第 247 回 (2022 年 4 月)

n は 3 以上の整数とする。正 n 角形の外接円の半径を正 n 角形の半径とよぶ。

$2n + 2$ 個の面で囲まれた凸多面体で、次の 2 つの条件(a), (b)を満たすものを A_n とする。

- (a) 2 個の半径 1 の正 n 角形を面にもち、それらは平行である。
- (b) (a)の 2 個の面の他に互いに合同な $2n$ 個の正三角形を面にもつ。

例えば、 A_3 は正八面体になる。 $\theta = \frac{\pi}{n}$ とおく。

- (1) A_n の辺の数を n を用いて表せ。
- (2) 条件(b)の正三角形の高さを θ を用いて表せ。

条件(a)の 2 つの面の間の距離(一方の面から他方の面へ引いた垂線の長さ)を H とする。

- (3) H を θ を用いて表せ。
- (4) A_n の体積を V とするとき、 $\frac{V}{nH}$ を θ を用いて表せ。

出典：2022 年 京都府立医科大学

解答

- (1) 2 つの正 n 角形をつなぐ辺が正 n 角形の 1 つの頂点ごとに 2 本ずつあり、正 n 角形の辺とあわせて、 A_n の辺の数は

$$2n + 2n = 4n \quad (\text{答})$$

- (2) 半径 1 の正 n 角形の一辺の長さは

$$2 \sin \frac{\pi}{n} = 2 \sin \theta$$

条件(b)の正三角形の一辺の長さも $2 \sin \theta$ であり、

$$\text{高さは } 2 \sin \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta \quad (\text{答})$$

- (3) A_n の頂点は、座標空間において

$$(\cos(2k+1)\theta, \sin(2k+1)\theta, 0), (\cos 2k\theta, \sin 2k\theta, H) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

であるとしてよいから、

$$\begin{aligned}
(\cos \theta - 1)^2 + (\sin \theta - 0)^2 + (0 - H)^2 &= (2 \sin \theta)^2 \\
H^2 &= 4 \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \cos \theta + 1) \\
&= 4(1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta - 2 \\
&= 2(1 + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) \\
\therefore H &= \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(4) A_n は正 n 角柱から等辺の長さ $2 \sin \frac{\theta}{2}$, 等辺のはさむ角 $\pi - 2\theta$ の二等辺三角形を底辺とする高さ H の三角錐を $2n$ 個除いた図形である。

正 $2n$ 角柱の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \theta \times 2n \times H = nH \sin \theta$$

三角錐の体積 V_2 は

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \sin(\pi - 2\theta) \times H \\
&= \frac{1}{3} \times 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta \times H \\
&= \frac{1}{3} (1 - \cos \theta) \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \cdot H \\
&= \frac{2}{3} H \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - 2nV_2 \\
&= nH \sin \theta \left\{ 1 - \frac{4}{3} \cos \theta (1 - \cos \theta) \right\} \\
&= \frac{1}{3} nH \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 3) \\
\therefore \frac{V}{nH} &= \frac{1}{3} \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 3) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$