

図チャレ 第 248 回 (2022 年 5 月)

原点を O とする座標空間に、4 点 $A(1, 2, 1)$, $B(2, -1, -3)$, $C(1, 1, 1)$, $D(3, 2, -1)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB の面積を求めよ。
- (2) 2 点 O , A を通る直線を L_1 , 2 点 O , B を通る直線を L_2 とする。直線 L_1 上に点 E , 直線 L_2 上に点 F をとる。ここで、点 E と点 F は異なるとする。いま、 \overrightarrow{EF} と \overrightarrow{OC} は垂直で、2 点 E , F を通る直線 L_3 が点 D を通るとする。次の (i), (ii) に答えよ。
- (i) 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標を求めよ。
- (ii) 点 B と直線 L_3 上の点との距離の最小値を求めよ。

出典：2022 年 札幌医科大学

解答

$$(1) \quad \begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2 = 14 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 1 \times (-3) = -3 \end{aligned}$$

三角形 OAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \times 14 - (-3)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2)(i) \quad \overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数}) \text{ とおくと} \\ (3, 2, -1) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, -1, -3)$$

において成分を比べて

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 3 \quad \text{かつ} \quad 2\alpha - \beta = 2 \quad \text{かつ} \quad \alpha - 3\beta = -1 \\ \therefore \alpha &= \frac{7}{5}, \quad \beta = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

よって、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{7}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{4}{5} \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots ①$$

点 E は L_1 上に, 点 F は L_2 上にあるから

$$\overrightarrow{OE} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OF} = b\overrightarrow{OB} \quad (a, b \text{ は実数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。 $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}$ はともに \overrightarrow{OC} と垂直でないから $a \neq 0, b \neq 0$ であり,

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{a}\overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{b}\overrightarrow{OF}$$

①に代入して

$$\overrightarrow{OD} = \frac{7}{5a}\overrightarrow{OE} + \frac{4}{5b}\overrightarrow{OF}$$

点 D は直線 EF 上にあるから

$$\frac{7}{5a} + \frac{4}{5b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であり,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} \\ &= b(2, -1, -3) - a(1, 2, 1) \\ &= (-a + 2b, -2a - b, -a - 3b) \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

は \overrightarrow{OC} と垂直であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{EF} &= 1 \cdot (-a + 2b) + 1 \cdot (-2a - b) + 1 \cdot (-a - 3b) = 0 \\ -4a - 2b &= 0 \\ \therefore b &= -2a \quad \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

③かつ⑤より

$$a = 1, \quad b = -2$$

であるから, ②に代入して

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} = (1, 2, 1), \quad \overrightarrow{OF} = -2\overrightarrow{OB} = (-4, 2, 6)$$

L_3 と xy 平面との交点を P とすると, L_3 (直線 EF) 上の点として

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OF} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (1-t)(1, 2, 1) + t(-4, 2, 6) \\ &= (-5t+1, 2, 5t+1) \quad \dots\dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

と表され, xy 平面上の点でもあるから

$$5t+1=0 \quad \therefore t = -\frac{1}{5}$$

⑥より, 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標は

$$(2, 2, 0) \quad (\text{答})$$

(ii) $BE = BA, BF = 3OB$ より $\triangle BEF$ の面積は $\triangle OAB$ の 3 倍であり, (1) より

$$\triangle BEF = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

④に $a = 1, b = -2$ を代入すると

$$\overrightarrow{EF} = (-5, 0, 5)$$

であるから

$$EF = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

点 B から直線 EF におろした垂線の長さを h とすると

$$\triangle BEF = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot h = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

であるから

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

であり、点 B と直線 L_3 (直線 EF) 上の点との距離の最小値は

$$\frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (\text{答})$$

である。