

図チャレ 第 249 回 (2022 年 6 月)

i は虚数単位とする。次の条件 (I), (II) をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I) z の虚部は正である。

(II) 複素数平面上の点 $A(1)$, $B(1 - iz)$, $C(z^2)$ は一直線上にある。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 1 でない複素数 α について, α の虚部が正であることは, $\frac{1}{\alpha - 1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) $w = \frac{1}{z - 1}$ とする。 z が S を動くとき, $\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めよ。

出典 : 2022 年 筑波大学

解答

(1) α の虚部は

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i},$$

$\frac{1}{\alpha - 1}$ の虚部は

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\bar{\alpha} - 1} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{(\bar{\alpha} - 1) - (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)} = -\frac{1}{|\alpha - 1|^2} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

であるから,

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i} > 0 \iff \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\bar{\alpha} - 1} \right) < 0$$

(証明おわり)

(2) (I) より

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$z \neq 0$ であり, (II) より

$$\frac{z^2 - 1}{(1 - iz) - 1} = \frac{z^2 - 1}{-iz} \text{ は実数}$$

であり,

$$\frac{\bar{z}^2 - 1}{i\bar{z}} = \frac{z^2 - 1}{-iz}$$

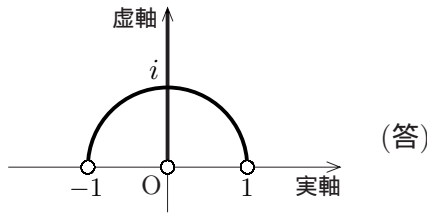
$$z(\bar{z}^2 - 1) + \bar{z}(z^2 - 1) = 0$$

$$z\bar{z}(\bar{z} + z) - (z + \bar{z}) = 0$$

$$(z + \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$\therefore \frac{z + \bar{z}}{2} = 0 \text{ または } |z| = 1 \quad \dots\dots ②$$

集合 S は ①かつ②を満たす点 z の集合であるから，図示すると



(3) 点 z が S を動くとき，点 $w = \frac{1}{z-1}$ の軌跡をまず求める。

(2)より $Im(z) > 0$ であるから，(1)より

$$Im(w) < 0$$

(i) $z + \bar{z} = 0$ のとき

$$1 + \frac{1}{w} + 1 + \frac{1}{\bar{w}} = 0$$

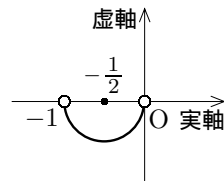
$$\frac{w + \bar{w}}{w\bar{w}} = -2$$

$Im(w) < 0$ ，特に $w \neq 0$ のもとで

$$w\bar{w} + \frac{1}{2}(w + \bar{w}) = 0$$

$$\left(w + \frac{1}{2}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

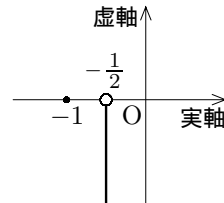
$$\therefore \left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad (Im(w) < 0)$$



(ii) $|z| = 1$ のとき

$$\left|1 + \frac{1}{w}\right| = \frac{|w+1|}{|w|} = 1$$

$$\therefore |w+1| = |w| \quad (Im(w) < 0)$$



$\left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\right|$ は点 $-\frac{i}{\sqrt{2}}$ からの距離を表すから，それぞれの場合における最小値は

$$z + \bar{z} = 0 \text{ のとき } \left|-\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$|z|=1 \text{ のとき } \left| -\frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}$$

である。

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2} > 0$$

であるから，求める最小値は

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (\text{答})$$

(別解) $\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めるだけであれば，点 w の軌跡を求めないで直接計算

してもよいが，こちらの方が労力が大きいように思われる。(2)の結果を踏まえて，実部が0の場合と $|z|=1$ の場合に分ける。

(i) $z = yi$ ($y > 0$) のとき

$$\begin{aligned} w + \frac{i}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{yi-1} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-yi-1}{(yi-1)(-yi-1)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1-yi}{y^2+1} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 &= \left(\frac{-1}{y^2+1} \right)^2 + \left(\frac{-y}{y^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1-\sqrt{2}y}{y^2+1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f(y) = \frac{1-\sqrt{2}y}{y^2+1}$ ($y > 0$) とおくと

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{-\sqrt{2}(y^2+1) - (1-\sqrt{2}y) \cdot 2y}{(y^2+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}y^2 - 2y - \sqrt{2}}{(y^2+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(y^2+1)^2} \left(y - \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \left(y - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

y	(0)	$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	(∞)
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	\searrow	極小	\nearrow

$y = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ のとき $y^2 = 1 + \sqrt{3}y$ を満たすことより

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1-(1+\sqrt{3})}{2+(1+\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}+1} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$\left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = f(y) + \frac{1}{2}$ の最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} &= -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$\therefore \left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\right|$ の最小値は $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(ii) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi$) のとき

$$\begin{aligned} z-1 &= \cos \theta - 1 + i \sin \theta \\ &= -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2i \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$w = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2i \sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} i$$

$$\therefore \left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\right| \geq \frac{1}{2}$$

(i), (ii) および

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2} > 0$$

より

$$\left|w + \frac{i}{\sqrt{2}}\right| \text{ の最小値は } \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (\text{答})$$