

図チャレ 第 250 回 (2022 年 7 月)

楕円 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の焦点の 1 つを F とし, $\angle PFQ = \frac{\pi}{2}$ を満たすように楕円 E 上に 2 点 P, Q をとるとき, 三角形 PFQ の面積 S の最大値を求めよ。

解答

$F(\sqrt{3}, 0), F'(-\sqrt{3}, 0)$ とし,

$$P(r \cos \theta, r \sin \theta), Q\left(r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

として題意の一般性を損なわない。

$$\angle PFF' = \pi - \theta \text{ または } \theta - \pi$$

であるが,

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi)$$

であることに注意する。楕円の性質より

$$FP + F'P = r$$

であることも考えて, $\triangle FPF'$ に余弦定理を適用すると

$$(4 - r)^2 = r^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot r \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$16 - 8r = 12 + 4\sqrt{3}r \cos \theta$$

$$(8 + 4\sqrt{3} \cos \theta)r = 4$$

$$\therefore FP = r = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos \theta}$$

これは楕円の極方程式を表すから

$$FQ = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \sin \theta}$$

$\triangle PFQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot FQ = \frac{1}{2(2 + \sqrt{3} \cos \theta)(2 - \sqrt{3} \sin \theta)}$$

$$\frac{1}{S} = 2(2 + \sqrt{3} \cos \theta)(2 - \sqrt{3} \sin \theta)$$

$$= 8 + 4\sqrt{3}(\cos \theta - \sin \theta) - 6 \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

ここで,

$$t = \cos \theta - \sin \theta \quad \dots\dots ②$$

とおくと

$$t^2 = \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1 - t^2}{2} \quad \dots\dots ③$$

②を合成すると

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ であるから ,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

②, ③を①に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S} &= 8 + 4\sqrt{3}t - 6 \cdot \frac{1-t^2}{2} \\
&= 3t^2 + 4\sqrt{3}t + 5 \\
&= 3 \left(t + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1
\end{aligned}$$

$-\frac{2}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{4}}{\sqrt{3}} > 0$ より $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ は④の範囲に含まれるから ,

$\frac{1}{S}$ は $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ において最小値 1 をとる。

よって ,

S の最大値は 1 (答)

である。