

図チャレ 第 251 回 (2022 年 8 月)

座標空間において，半径 1 の球 B が領域

$$D: -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2$$

内を自由に動くとき，領域 D 内で球 B が通過し得ない部分の体積 V を求めよ。

解答

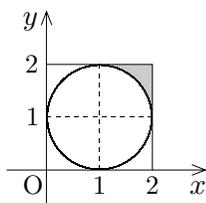
対称性を考えると，

$$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$$

の範囲で B が通過し得ない部分 R の体積を求めて 8 倍すればよい。

(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

領域 R の平面 $z = t$ による断面は



の網目部分となるから， R の断面積 $S(t)$ は

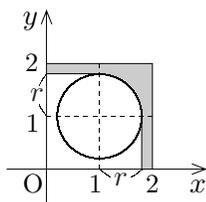
$$S(t) = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

球 B が平面 $z = 2$ と接するとき， $z = t$ による切り口の円の半径を r とすると

$$r = \sqrt{1 - (t - 1)^2}$$

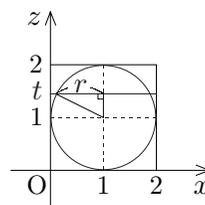
領域 R の $z = t$ による断面は



の網目部分となるから， R の断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= 2(1 - r) \times 2 - (1 - r)^2 + r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 3 - 2r - \frac{\pi}{4} r^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{1 - (t - 1)^2} - \frac{\pi}{4} (2t - t^2) \end{aligned}$$

領域 D 内で球 B が通過し得ない部分の体積 V は



$$\begin{aligned}
V &= 8 \int_0^2 S(t) dt \\
&= 8 \left(\int_0^1 S(t) dt + \int_1^2 S(t) dt \right) \\
&= 8 \int_0^1 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) dt + 8 \int_1^2 \left\{ 3 - 2\sqrt{1 - (t-1)^2} + \frac{\pi}{4}(t^2 - 2t) \right\} dt \\
&= 8 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + 8 \cdot 3 \cdot (2-1) - 16 \cdot \frac{\pi}{4} + 2\pi \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_1^2 \\
&= (8 - 2\pi) + 24 - 4\pi + 2\pi \left(\frac{8-1}{3} - 4 + 1 \right) \\
&= 32 - \frac{22}{3} \pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$