

図チャレ 第253回(2022年10月)

2曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = -\frac{1}{x}$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。

解答

$$(\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(x^2 - 1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$x = t$ ($t^2 > 1$) における曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ の接線の方程式は

$$y = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}(x - t) + \sqrt{t^2 - 1}$$

$$\therefore y = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}x - \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad \dots\dots ①$$

$x = u$ における曲線 $y = -\frac{1}{x}$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{u^2}(x - u) - \frac{1}{u}$$

$$\therefore y = \frac{1}{u^2}x - \frac{2}{u} \quad \dots\dots ②$$

①と②が同一直線であると考えて

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{u^2} \quad \dots\dots ③$$

$$-\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\frac{2}{u} \quad \dots\dots ④$$

④を③に代入すると

$$t \cdot \frac{2}{u} = \frac{1}{u^2} \quad \therefore t = \frac{1}{2u}$$

④に代入して t を消去すると

$$\sqrt{\frac{1}{4u^2} - 1} = \frac{u}{2} > 0$$

$u > 0$ のもとで

$$\sqrt{1 - 4u^2} = \frac{u}{2} \cdot 2u$$

$$1 - 4u^2 = (u^2)^2$$

$$u^4 + 4u^2 - 1 = 0$$

$$u^2 = -2 + \sqrt{5} \quad \therefore u = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

②に代入して、題意を満たす共通接線の方程式は

$$y = (2 + \sqrt{5})x - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

(注) 結果的に、題意を満たす共通接線がただ一つしか引けないことをも示している。