

## 図チャレ 第254回(2022年11月)

四面体 ABCD の辺 CD の中点を O とし,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \sqrt{3}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = -\sqrt{3}$  である。

- (1) 点 A, B から直線 CD におろした垂線の足をそれぞれ E, F とする。  $\overrightarrow{OE} = \alpha \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OF} = \beta \vec{c}$  とおくととき, 実数  $\alpha, \beta$  の値を求めよ。
- (2)  $\overrightarrow{EA}$  と  $\overrightarrow{FB}$  のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とするとき,  $\cos \theta$  の値を求めよ。
- (3) 四面体 ABCD の体積  $V$  を求めよ。

解答

$$(1) \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \alpha \vec{c} - \vec{a}$$

は直線 CD と垂直であるから

$$(\alpha \vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\alpha |\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\alpha \times 2^2 - \sqrt{3} = 0$$

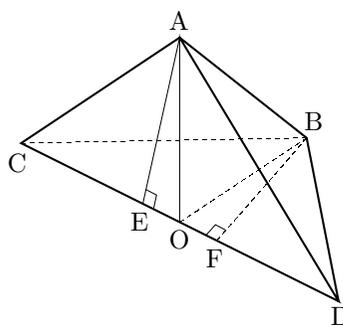
$$\therefore \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

同様にして,

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \beta \vec{c} - \vec{b}$$

が直線 CD と垂直であることより

$$\beta = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$



(注) 以上は正射影の公式の証明そのものであり, 公式を用いると

$$\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \beta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

が直ちに得られる。

$$(2) \quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \vec{a} - \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c}, \quad \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OF} = \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} \quad \text{について}$$

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{FB} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{16} |\vec{c}|^2$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (-\sqrt{3}) - \frac{3}{16} \times 2^2 = \frac{11}{4}$$

$$|\overrightarrow{EA}|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{3}{16} |\vec{c}|^2$$

$$= 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \frac{3}{16} \times 2^2 = \frac{13}{4}$$

$$|\overrightarrow{FB}|^2 = |\vec{b}|^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{3}{16} |\vec{c}|^2 = \frac{13}{4}$$

求める値は

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{EA}| |\overrightarrow{FB}|} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{11}{13} \quad (\text{答})$$

(3) 平面 ACD と平面 BCD の交線は直線 CD であり,  $\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{FB}$  はともに交線 CD と垂直であるから, 平面 ACD と平面 BCD のなす角は  $\theta$  と  $\pi - \theta$  のうち大きくない方である。(2)より  $\cos \theta > 0$  であるから,

平面 ACD と平面 BCD のなす角は  $\theta$

である。

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{13^2 - 11^2}}{13} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

点 A から平面 BCD におろした垂線の足を H とすると, AH の垂線の長さ  $h$  は

$$h = AE \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{13} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$\triangle BCD$  の面積  $S$  は  $\triangle OBC$  の面積の 2 倍であるから

$$S = \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \sqrt{2^2 \times 2^2 - (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$$

四面体 ABCD の体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \times \sqrt{13} \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

(注) 四面体 ABCD の体積を求めるだけなら  $\overrightarrow{OH}$  を取って求める必要はないが,  $\overrightarrow{OH}$  を求めるのであれば, 次のような解答になる。

$\overrightarrow{FB}$  と同じ向きの単位ベクトル  $\vec{e}$  は

$$\vec{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{FB}|} \overrightarrow{FB} = \frac{2}{\sqrt{13}} \left( \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} &= (AE \cos \theta) \vec{e} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \left( \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} \right) = \frac{11}{13} \left( \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} \right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EH}$  より

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} + \frac{11}{13} \left( \vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{c} \right) = \frac{11}{13} \vec{b} + \frac{6\sqrt{3}}{13} \vec{c}$$

(参考) 問題の設定をヒントにしないで定石通りに計算すると, 以下のようになる。

垂線の足 H は平面 BCD 上の点であるから

$$\overrightarrow{OH} = s\vec{b} + t\vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表され,

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \dots\dots ①$$

は平面 BCD と垂直であるから

$$(-\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{かつ} \quad (-\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$$

これを計算すると,

$$\begin{aligned} (-\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} &= -\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= -2 + s \times 2^2 + t(-\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

より

$$4s - \sqrt{3}t = 2 \quad \dots\dots ②$$

であり,

$$\begin{aligned} (-\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} &= -\vec{a} \cdot \vec{c} + s\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 \\ &= -\sqrt{3} + s \times (-\sqrt{3}) + t \times 2^2 = 0 \end{aligned}$$

より

$$-\sqrt{3}s + 4t = \sqrt{3} \quad \dots\dots ③$$

②かつ③を解いて

$$s = \frac{11}{13}, \quad t = \frac{6\sqrt{3}}{13}$$

①に代入すると

$$\overrightarrow{AH} = -\vec{a} + \frac{11}{13}\vec{b} + \frac{6\sqrt{3}}{13}\vec{c}$$

AHの長さを  $h$  とすると

$$\begin{aligned} h^2 &= |\overrightarrow{AH}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{13}(-13\vec{a} + 11\vec{b} + 6\sqrt{3}\vec{c}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{13^2} (169|\vec{a}|^2 + 121|\vec{b}|^2 + 108|\vec{c}|^2 \\ &\quad - 286\vec{a} \cdot \vec{b} + 132\sqrt{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - 156\sqrt{3}\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{13^2} \{ 169 \times 4 + 121 \times 4 + 108 \times 4 - 286 \times 2 \\ &\quad + 132\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) - 156\sqrt{3} \times \sqrt{3} \} \\ &= \frac{676 + 484 + 432 - 572 - 396 - 468}{13^2} = \frac{156}{13^2} \\ &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

$$\therefore h = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$