

図チャレ 第 255 回 (2022 年 12 月)

xy 平面上に楕円 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) があり, E の焦点 $(c, 0)$ ($c > 0$) を F とする。 E 上に点 P をとり, P における E の接線に F からおろした垂線の足を H とする。

- (1) $P(a\alpha, b\beta)$ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) とおくと, 点 H の座標を a, b, c, α, β を用いて表せ。
 (2) 点 P が楕円 E 上を動くとき, 点 H が描く図形を求めよ。必要ならば, $\alpha \neq -1$ のとき $\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\beta = \frac{2t}{1+t^2}$ と表されることを用いてもよい。

解答

- (1) $P(a\alpha, b\beta)$ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) における E の接線の方程式は

$$\frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{b}y = 1$$

\overrightarrow{FH} はこの接線と垂直であるから

$$\overrightarrow{FH} = k \left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b} \right) \quad (k \text{ は実数})$$

と表され, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とおくと

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FH} = \left(c + \frac{\alpha}{a}k, \frac{\beta}{b}k \right) \quad \dots\dots (*)$$

H は接線上の点であるから

$$\frac{\alpha}{a} \left(c + \frac{\alpha}{a}k \right) + \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\beta}{b}k = 1$$

$$\frac{c\alpha}{a} + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{1 - \alpha^2}{b^2} \right) k = 1$$

$$\frac{b^2\alpha^2 + a^2(1 - \alpha^2)}{a^2b^2} k = 1 - \frac{c\alpha}{a}$$

$$\frac{a^2 - c^2\alpha^2}{a^2b^2} k = \frac{a - c\alpha}{a}$$

$a > \sqrt{a^2 - b^2} = c$, $|\alpha| \leq 1$ より $a \pm c\alpha > 0$ であることを考えて

$$k = \frac{ab^2}{a + c\alpha}$$

(*) より

$$\begin{aligned} x_H &= c + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{ab^2}{a + c\alpha} \\ &= \frac{c(a + c\alpha) + b^2\alpha}{a + c\alpha} \\ &= \frac{ca + (a^2 - b^2)\alpha + b^2\alpha}{a + c\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{a(c + a\alpha)}{a + c\alpha}$$

$$y_H = \frac{\beta}{b} \cdot \frac{ab^2}{a + c\alpha} = \frac{ab\beta}{a + c\alpha}$$

垂線の足 H の座標は

$$H\left(\frac{a(c + a\alpha)}{a + c\alpha}, \frac{ab\beta}{a + c\alpha}\right) \quad (\text{答})$$

(注) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ により他の表示もできる。

(2) $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ のとき

$$H(-a, 0)$$

$(\alpha, \beta) \neq (-1, 0)$ のとき,

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

とおくと,

$$\alpha = \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \beta = \sin \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

であるから,

$$\frac{c + a\alpha}{a + c\alpha} = \frac{c(1 + t^2) + a(1 - t^2)}{a(1 + t^2) + c(1 - t^2)} = \frac{a + c - (a - c)t^2}{a + c + (a - c)t^2}$$

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{a^2 - c^2}{(a + c)^2} = \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{(a + c)^2} = \left(\frac{b}{a + c}\right)^2 \text{であることを用いると}$$

$$\frac{c + a\alpha}{a + c\alpha} = \frac{1 - \frac{a - c}{a + c}t^2}{1 + \frac{a - c}{a + c}t^2} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a + c}t\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a + c}t\right)^2}$$

$$\frac{b\beta}{a + c\alpha} = \frac{b \cdot 2t}{a(1 + t^2) + c(1 - t^2)} = \frac{2 \cdot \frac{b}{a + c}t}{1 + \left(\frac{b}{a + c}t\right)^2}$$

t が全実数値をとって動くとき

$$\frac{b}{a + c}t \text{ は全実数値をとり得る}$$

から, $(-a, 0)$ のときとあわせて, 点 H が描く図形は

原点を中心とする半径 a の円 (答)

である。

(注) 点 H が円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上のどの部分を動くかを, いかにかに論じるかがポイントである。