

図チャレ 第 257 回 (2023 年 2 月)

半径 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ の円に内接する四角形 ABCD において, $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = BD$,
 $\angle ABD < 90^\circ$, $\sin \angle BAC : \sin \angle DAC = 1 : \sqrt{5}$ とする。

- (1) 辺 AB の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle BCD$ の値を求めよ。
- (3) 辺 BC と辺 CD の長さを求めよ。

出典：2013 年 法政大学 法学部・文学部・経営学部

解答

- (1) $\triangle ABD$ において余弦定理より

$$\sin \angle ABD = \frac{2\sqrt{5}}{2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4}} = \frac{4}{5}$$

$\angle ABD < 90^\circ$ であるから

$$\cos \angle ABD = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$AB = x$ とおき, $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \frac{3}{5}$$
$$\frac{4}{5}x^2 = 20 \quad \therefore x^2 = 25$$

$x = AB > 0$ より

$$AB = 5 \quad (\text{答})$$

- (2) $\triangle ABD$ において余弦定理より

$$\cos \angle BAD = \frac{25 + 20 - 25}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

補角の公式より

$$\cos \angle BCD = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ において正弦定理より

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4}}, \quad \sin \angle DAC = \frac{CD}{2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4}}$$

であるから, $\sin \angle BAC : \sin \angle DAC = 1 : \sqrt{5}$ より

$$BC = k, \quad CD = \sqrt{5}k \quad (k \text{ は正の実数})$$

と表される。△BCDにおいて余弦定理より

$$5^2 = k^2 + 5k^2 - 2 \cdot k \cdot \sqrt{5}k \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 8k^2 \quad \therefore k = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

よって, 辺 BC と辺 CD の長さは

$$BC = k = \frac{5\sqrt{2}}{4}, \quad CD = \sqrt{5}k = \frac{5\sqrt{10}}{4} \quad (\text{答})$$

(注) 本問で △ABD は二等辺三角形なので, (1), (2) は次のように解くこともできる。

(1) $\angle BAD = \angle BDA = \theta$, $AB = BD = x$ とおくと,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{x}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}$$

△ABD において正弦定理より

$$\frac{x}{\sin \theta} = 2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$(2x^2)^2 = 125(x^2 - 5)$$

$$4x^4 - 125x^2 + 625 = 0$$

$$(2x^2 + 25)^2 - 225x^2 = 0$$

$$(2x^2 + 15x + 25)(2x^2 - 15x + 25) = 0$$

$$(2x + 5)(x + 5)(2x - 5)(x - 5) = 0$$

$\angle ABD < 90^\circ$ より

$$x^2 + x^2 > (2\sqrt{5})^2$$

(および $x > 0$, $x^2 - 5 > 0$) であるから

$$x = AB = 5 \quad (\text{答})$$

(2) (1) の考察より

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BCD = 180^\circ - \theta$$

であり, 補角の公式より

$$\cos \angle BCD = -\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$