

図チャレ 第 258 回 (2023 年 3 月)

O を原点とする xyz 空間において, 次の 2 つの球面 S_1, S_2 が与えられている。

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1,$$

$$S_2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5$$

S_1 と S_2 の交わりの図形を E とし, E を含む平面 π と xy 平面との交線を l とする。 xy 平面において, l を y 軸に関して対称移動して得られる直線を m とする。 l と m の交点を A , m と x 軸の交点を B , l と x 軸の交点を C とし, E 上の点を P として四面体 $PABC$ を考えるとき, 以下の各問に答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1 π の方程式を x, y, z を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 xy 平面内における l の方程式を x, y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3 xy 平面内における m の方程式を x, y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4 四面体 $PABC$ の体積 V の最小値を求めよ。また, そのときの P の座標を求めよ。

出典 : 2023 年 日本医科大学

解答

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

問 1 S_1 の中心 $(0, 0, 2)$ と S_2 の中心 $(1, 2, 3)$ との距離

$$d = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{6}$$

は半径の和 $1 + \sqrt{5}$ より小さいから, S_1 と S_2 の交わり E は円となり, E を含む平面 π の方程式は, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$(2x - 1) + (4y - 4) + (2z - 5) = 1 - 5$$

$$\therefore x + 2y + z - 3 = 0 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

問 2 l の方程式は $\textcircled{3}$ かつ $z = 0$ であるから, 求める方程式は

$$x + 2y - 3 = 0 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

問 3 l の方程式 $\textcircled{4}$ において $x \rightarrow -x$ として, m の方程式は

$$-x + 2y - 3 = 0 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

問 4 $\textcircled{4}$ かつ $\textcircled{5}$ を連立方程式として解くことにより

$$A\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$$

m, l と x 軸との交点を求めて

$$B(-3, 0, 0), C(3, 0, 0)$$

$\triangle ABC$ の面積 M は

$$M = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot y_A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

S_1 の中心 $(0, 0, 2)$ を D_1 , S_2 の中心 $(1, 2, 3)$ を D_2 とおき, 交円 E 上で z 座標が最大である点 F , 最小である点 G とする。直線 D_1D_2 と直線 FG を含む平面は xy 平面と垂直であるから, 直線 D_1D_2 と直線 FG を含む平面の方程式は

$$y = 2x \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

であり, 2 点 F, G は

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{3} \text{ かつ } \textcircled{6}$$

を解くことにより得られる。③かつ⑥を x, y の連立方程式とみて解くと

$$x = \frac{1}{5}(3-z), \quad y = \frac{2}{5}(3-z) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

①に代入して

$$\frac{1}{5}(z-3)^2 + (z-2)^2 = 1$$

$$z^2 - 6z + 9 + 5(z^2 - 4z + 4) = 5$$

$$6z^2 - 26z + 24 = 0$$

$$2(z-3)(3z-4) = 0$$

$$\therefore z = 3, \frac{4}{3}$$

⑦に代入して x 座標, y 座標も求めて

$$F(0, 0, 3), \quad G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

四面体 $PABC$ の体積 V は

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ のとき最小値 } \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2 \quad (\text{答})$$

をとる。