

## 図チャレ 第 259 回 (2023 年 4 月)

$xy$  平面上の曲線  $C$  を, 媒介変数  $t$  を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  に接する直線のうち  $y$  軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線  $C$  のうち  $y \leq x$  の領域にある部分と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

出典：2023 年 九州大学

解答

(1)  $t$  で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2 \cdot 2 \sin t \cos t = 1 + 2 \sin 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \cos t$$

接ベクトル  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  が  $y$  軸と平行となるのは

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2 \sin 2t = 0, \quad \text{すなわち} \quad \sin 2t = -\frac{1}{2}$$

のときであり,  $0 < 2t < 2\pi$  より

$$2t = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \therefore t = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

よって,  $C$  の接線のうち,  $y$  軸と平行なものは

2 本 (答)

ある。

(2)  $0 < t < \pi$  における動点  $(t + \sin^2 t, t + \sin t)$  の動きをまとめると

$t$	(0)	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$	$(\pi)$			
$\frac{dx}{dt}$	(1)	+	0	-	0	+	
$\frac{dy}{dt}$	(2)	+		+		+	(0)
$C$	(0, 0)	↖		↗		↖	$(\pi, \pi)$

$0 < t < \pi$  において

$$x = y \iff 2\sin^2 t = \sin t \iff \sin t = \frac{1}{2} \iff t = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

曲線  $C$  は  $y$  の関数  $x = f(y)$  のグラフとみなすことができ, 直線  $y = x$  とは 2 点

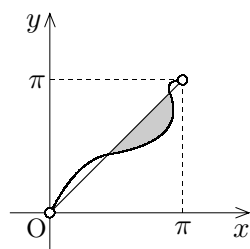
$$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}\right)$$

で交わり,  $0 < y < \pi$  において囲まれた部分は

$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}, \quad y \leq x \leq f(y)$$

となるから, 求める面積  $S$  は

$$S = \int_{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}} \{f(y) - y\} dy$$



ここで,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}} f(y) dy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} x \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (t + 1 - \cos 2t)(1 + \cos t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left( t + 1 - \cos 2t + \cos t - \frac{\cos 3t + \cos t}{2} + t \cos t \right) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2} t^2 + t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{2} \sin t + t \sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &\quad - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} 1 \cdot \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{25-1}{6^2} \pi^2 + \left( \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} (1-1) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12} \right) \\ &\quad - \left[ -\cos t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{5}{6}\pi - \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi^2}{3} + \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}} y dy \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$