

図チャレ 第 260 回 (2023 年 5 月)

次の条件 (a), (b) を満たす凸多面体を考える。

- (a) 面は正三角形または正方形である。
- (b) 合同な 2 つの面は辺を共有しない。

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 一つの頂点を共有する面の数は 4 であることを証明せよ。
- (2) 正三角形を正方形の面の数をそれぞれ求めよ。
- (3) 正八面体を平面で何回か切断することで条件 (a), (b) を満たす凸多面体を得られる。どのように切断するのか説明せよ。
- (4) (3) の切断で得られる凸多面体を F とし, F の 1 辺の長さは 1 とする。 F のすべての正三角形の面に接する球を B とする。 B と F の共通部分の体積を求めよ。

出典: 2023 年 京都府立医科大学

解答

- (1) 条件 (a), (b) より 1 つの頂点に集まる面の数は偶数であり, 正三角形と正方形 1 枚ずつでは重ね合わせられないから,

1 つの頂点に集まる面の数は 4 以上

である。正三角形と正方形が 3 枚ずつ以上ならば, 1 つの頂点に集まる面の内角の和は

$$60^\circ \times 3 + 90^\circ \times 3 = 450^\circ$$

以上となって 360° を超えるから,

1 つの頂点に集まる面の数はちょうど 4

である。

- (注) 合同ではない複数の正三角形, 正方形が存在する可能性も考慮しなければならないが, 隣り合う正三角形と正方形の辺の長さは等しいので, 結局凸多面体のすべての辺の長さは等しいことになる。

- (2) 正三角形(の面)の各辺は正方形(の面)と辺を共有し, その 3 枚の正方形の間に正三角形が入ることになる。したがって, 題意の凸多面体は,

下底が正六角形, 上底が正三角形, 側面が正方形と正三角形が 3 枚ずつである立体を 2 つ合わせた図形

であるから,

正三角形は $(1 + 3) \times 2 = 8$ 面, 正方形は $3 \times 2 = 6$ 面 (答)

- (注) (3) の結果を認めるならば,

正三角形の面の数は正八面体の面の数 8

正方形の面数は正八面体の頂点の数 6

と簡単にわかるが、論理的には (2) の考察がないと、(3) の結果は得られない。

- (3) 正八面体を座標空間内に置き、頂点を $P(0, 0, a)$, $Q(a, 0, 0)$, $R(0, a, 0)$, $R(0, a, 0)$, $S(-a, 0, 0)$, $T(0, -a, 0)$, $U(0, 0, -a)$ ($a > 0$) とする。

辺 PQ , PR , PS , PT の中点を結ぶと、正方形 $QRST$ と相似な正方形 (相似比 $\frac{1}{2}$) の断面が得られ、 Q , R , S , T , U に集まる 4 辺についても同様に考えられるから、題意の凸多面体 that 得られる切断の仕方は

正八面体の各頂点に集まる 4 辺の中点を結ぶ平面 6 枚で切断 (答)

- (4) (3) の設定において

$$(F \text{ の } 1 \text{ 辺の長さ}) = \frac{1}{2}QR = \frac{a}{\sqrt{2}} = 1$$

と考えられるから

$$a = \sqrt{2}$$

平面 PQR 上の面 (正三角形) の重心は $\triangle PQR$ の重心 $G\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ と一致し、

$$(B \text{ の半径}) = OG = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > \frac{a}{2}$$

B と F の共通部分は

半径 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ の球を、中心から距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の平面で切ったとき

の小さい方を 6 個取り除いた図形

であるから、 B と F の共通部分の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - 6\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\pi\left(\frac{2}{3} - x^2\right)dx \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\pi - 6\pi\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\pi - 4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} - \frac{36\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} + \frac{12\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} + \frac{4-1}{\sqrt{2}}\right)\pi \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{16\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\right)\pi \\ &= \frac{27\sqrt{3} - 32}{9\sqrt{6}}\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$