

図チャレ 第 261 回 (2023 年 6 月)

正の実数 a に対して, xy 平面上に 2 点 $A(2, a)$, $B(2, -a)$ をとる。原点を中心とする単位円を $C: x^2 + y^2 = 1$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が円 C 上を動くとき, $\triangle APB$ の重心 G の軌跡を求めよ。
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき, $\triangle APB$ の外心 Q の軌跡を求めよ。

出典: 2023 年 鳥取大学

解答

- (1) AB の中点を $M(2, 0)$ とおくと, $\triangle APB$ の重心 G は PM を $2:1$ に内分するから

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$$

よって, 点 P が円 C 上を動くとき, 重心 G の軌跡は

$$OM \text{ を } 2:1 \text{ に内分する点 } \left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ を中心とする半径 } \frac{1}{3} \text{ の円 (答)}$$

である。

- (2) $\triangle APB$ の外心 Q は, AB の垂直二等分線 (x 軸) と AP の垂直二等分線との交点である。 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと, AP の垂直二等分線の方程式は

$$(x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = (x - 2)^2 + (y - a)^2$$

$$\therefore 2(2 - \cos \theta)x - 2(a - \sin \theta)y = a^2 + 3$$

x 軸 ($y = 0$) との交点を求めて

$$Q\left(\frac{a^2 + 3}{2(2 - \cos \theta)}, 0\right)$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より

$$1 \leq 2 - \cos \theta \leq 3 \quad \therefore \frac{a^2 + 3}{6} \leq \frac{a^2 + 3}{2(2 - \cos \theta)} \leq \frac{a^2 + 3}{2}$$

よって, 外心 Q の軌跡は

$$2 \text{ 点 } \left(\frac{a^2 + 3}{6}, 0\right), \left(\frac{a^2 + 3}{2}, 0\right) \text{ を両端とする線分 (答)}$$

である。