

## 図チャレ 第 262 回 (2023 年 7 月)

複素数平面上に原点  $O$  を中心とする単位円  $C$  があり, 2 点  $A(z_1)$ ,  $B(z_2)$  は, 円  $C$  の周上にある。  $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  とするとき, 以下の問いに答えよ。ただし,  $i$  は虚数単位である。

- (1)  $z_1$  と  $z_2$  の積  $z_1 z_2$  および和  $z_1 + z_2$  を, それぞれ極形式で表せ。
- (2)  $w = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$  で表される点を  $P(w)$  とするとき,  $w$  を極形式で表せ。  
また, 原点  $O$ ,  $P(w)$ ,  $D(z_1 + z_2)$  の 3 点は, 同一直線上にあることを示せ。
- (3) 直線  $AP$  は, 円  $C$  の接線であることを示せ。
- (4) 直線  $AB$  に関して点  $P$  と対称な点を  $Q(v)$  とする。点  $Q$  が円  $C$  の周上にあるとき,  $\beta$  を  $\alpha$  の式で表せ。

出典: 2023 年 長崎大学

### 解答

- (1)  $\cos \theta + i \sin \theta$  をかけることは, 原点を中心として  $\theta$  回転させることを表すから,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$D(z_1 + z_2)$  について,  $OA = OB$ ,  $OD \perp AB$ ,  $0 < \alpha < \beta < \pi$  より

$$\angle AOD = \angle DOB = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$OD = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

であるから,

$$z_1 + z_2 = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} + i \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \right) \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の結果を用いて

$$w = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{1}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} + i \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \right) \quad (\text{答})$$

$\arg w = \arg(z_1 + z_2) = \frac{\beta + \alpha}{2}$  であるから, 原点  $O$ , 点  $P(w)$ , 点  $D(z_1 + z_2)$  は同一直線上にある。 (おわり)

(3) 点 A における円 C の接線と直線 OD の交点を E とすると ,

$$\angle OAP = \frac{\pi}{2}$$

$$AE = OA \tan \frac{\beta - \alpha}{2} = \tan \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$OA^2 + AE^2 = 1 + \tan^2 \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = |w|^2 = OP^2$$

であるから , (2) より

$$E = P$$

であり , 直線 AP は点 A における円 C の接線である。

(証明おわり)

(4)  $\frac{w+v}{2} = \frac{z_1+z_2}{2}$  より

$$v = z_1 + z_2 - w$$

$$= z_1 + z_2 - \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - 1}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \left( \cos \frac{\beta + \alpha}{2} + i \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \right)$$

点 Q が円 C 上にあるとき

$$|v| = \frac{\left| 2 \cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - 1 \right|}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = 1$$

$$2 \cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - 1 = \pm \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\left( 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + 1 \right) \left( \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\text{または } \left( 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - 1 \right) \left( \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + 1 \right) = 0$$

$0 < \frac{\beta - \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$  より

$$\cos \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

の場合に限られ ,

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \beta = \frac{2}{3}\pi + \alpha \quad (\text{答})$$