

図チャレ 第 263 回 (2023 年 8 月)

xy 平面において $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $B(-1, -1)$ とし, 点 P は $x \geq 0$, $y \geq 0$ の範囲内にある。直線 OP と線分 AB は共有点 Q を持ち, PQ の長さはつねに 2 である。

- (1) 点 P の y 座標の最大値を求めよ。
- (2) 線分 OP が通過してできる領域の面積 S を求めよ。

解答

- (1) $\angle AOQ = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) とすると

$$OQ = \frac{1}{\cos \theta}, \quad OP = 2 - \frac{1}{\cos \theta}$$

$P(x, y)$ とおくと,

$$x = \left(2 - \frac{1}{\cos \theta}\right) \cos \theta = 2 \cos \theta - 1$$

$$y = \left(2 - \frac{1}{\cos \theta}\right) \sin \theta = 2 \sin \theta - \tan \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \left(\cos^3 \theta - \frac{1}{2}\right)$$

α を $\cos^3 \alpha = \frac{1}{2}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を満たす定数とすると, $\cos^3 \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} < \cos^3 0$ より

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であり, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において

$$\frac{dy}{d\theta} > 0 \iff \cos^3 \theta > \frac{1}{2} = \cos^3 \alpha \iff \theta < \alpha$$

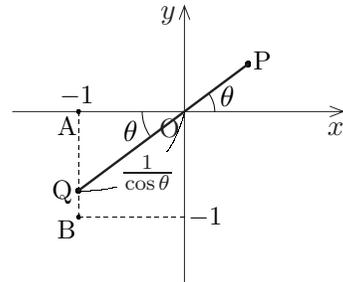
であるから, θ の関数としての y の増減は次のようになる。

θ	0	α	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{d\theta}$	+	0	-
y	0	↗ 極大	↘ $\sqrt{2} - 1$

点 P の y 座標は, $\theta = \alpha$ のとき, 最大値

$$\left(2 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \sin \alpha = (2 - \sqrt[3]{2}) \sqrt{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - \sqrt[3]{2})^{\frac{3}{2}} \quad (\text{答})$$

をとる。

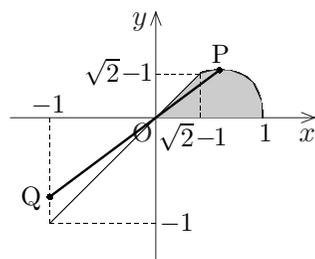


(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta < 0$$

であるから、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において θ と x は 1 対 1 であり、点 P が描く曲線はある x の関数 $y = f(x)$ ($\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1$) とみなせる。この $f(x)$ を用いることにより、線分 OP が通過してできる領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)^2 + \int_{\sqrt{2}-1}^1 f(x) dx \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin \theta - \tan \theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin \theta - \tan \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$



ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin \theta - \tan \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin^2 \theta - \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos 2\theta - \frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} (\sin \theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta + 1} - \frac{1}{\sin \theta - 1} \right) (\sin \theta)' d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta - 1} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

$$= \log(\sqrt{2} + 1)$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + 2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \log(\sqrt{2} + 1) \right\} \\ &= \frac{\pi + 1}{2} - 2\log(\sqrt{2} + 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(別解) 極座標で考えることにより

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{2\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \left[2\theta + \frac{1}{2} \tan \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi + 1}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{\pi + 1}{2} - 2\log(\sqrt{2} + 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$