

図チャレ 第265回(2023年10月)

直線 $x = \frac{1}{2}$ 上の点 P から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする。点 P が直線 $x = \frac{1}{2}$ 上の $x^2 + y^2 > 1$ の部分を動くとき, 直線 QR が通過することによってできる図形を図示せよ。

解答

P $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ とおくと, 点 P が $x^2 + y^2 > 1$ にあることより

$$|t| > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす。原点を O で表すと,

$$\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$$

であるから, 円

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と OP を直径とする円

$$x\left(x - \frac{1}{2}\right) + y(y - t) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

は 2 点 Q, R で交わる。したがって, 直線 QR の方程式は, ② - ③ より

$$\frac{1}{2}x + ty = 1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

直線 QR 上の点で $y = 0$ となるのは

$$(x, y) = (2, 0) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$y \neq 0$ のとき, ④は

$$t = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{2-x}{2y}$$

①より

$$\left|\frac{x-2}{y}\right| > \sqrt{3}$$

$$\frac{x-2}{y} < -\sqrt{3} \quad \text{または} \quad \frac{x-2}{y} > \sqrt{3}$$

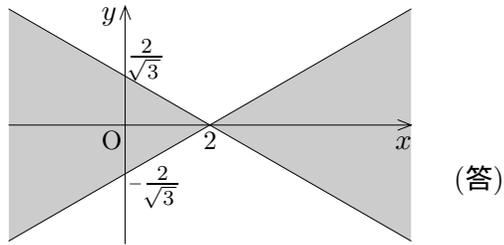
$$\frac{x + \sqrt{3}y - 2}{y} < 0 \quad \text{または} \quad \frac{x - \sqrt{3}y - 2}{y} > 0$$

$$y(x + \sqrt{3}y - 2) < 0 \quad \text{または} \quad y(x - \sqrt{3}y - 2) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

以上より, 直線 QR が通過してできる図形は

⑤ または ⑥

であり, 図示すると, 次図の網目部分となる。ただし, 点 (2, 0) を含み, 点 (2, 0) 以外の x 軸上の点および境界線上の点は含まない。



(注)

1° 直線④は点Pにおける円 $x^2 + y^2 = 1$ の極線である。

2° ④を導いたあとは，図形的に処理してもよい。

④を t についての恒等式とみると

$$(x, y) = (2, 0)$$

が得られるので，直線④は点 $(2, 0)$ を通る直線を表していることがわかる。これを円 $x^2 + y^2 = 1$ と2点で交わるように動かすと，点 $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接するときをそれぞれ限界とする領域となるが，直線QRが x 軸になる場合は除外される。 x 軸と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点 $(\pm 1, 0)$ が Q, R とすれば，点Pから引いた2接線が平行ということになって矛盾するからである。