

図チャレ 第266回(2023年11月)

座標空間において $O(0, 0, 0)$, $A(5, 7, 5)$ とし, 平面 $x - y + 4z = 0$ を α とする。
 点 P が平面 α 上を $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ を満たしながら動くとき, 三角形 OAP の面積が最大となるような点 P の座標を求めよ。

解答

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ は点 P が OA を直径とする球面上にあることを意味するから, 点 P が平面 α 上にあることを考えなければ,

$\triangle OAP$ の面積は $OP = AP$ のとき最大

となる。したがって, 平面 α 上に $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ かつ $OP = AP$ を満たす点 P が存在すれば, その点 P の座標が求めるものである。

$$x - y + 4z = 0 \quad \dots\dots ①$$

$OP = AP$ を満たす点 P の集まりは, OA の中点を通り, OA に垂直な平面であり, その方程式は

$$5\left(x - \frac{5}{2}\right) + 7\left(y - \frac{7}{2}\right) + 5\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 5x + 7y + 5z = \frac{99}{2} \quad \dots\dots ②$$

② - ① $\times 5$ より

$$12y - 15z = \frac{99}{2} \quad \therefore 4y - 5z = \frac{33}{2} \quad \dots\dots ③$$

② + ① $\times 7$ より

$$12x + 33z = \frac{99}{2} \quad \therefore 4x + 11z = \frac{33}{2} \quad \dots\dots ④$$

④ を変形すると

$$4x + 11\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

③ を変形すると

$$5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 4(y - 6)$$

となるから,

$$① \text{ かつ } ② \iff ③ \text{ かつ } ④ \iff \frac{x}{-11} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-\frac{3}{2}}{4}$$

よって, ①かつ②を満たす点 P は

$$P\left(-11t, 5t+6, 4t+\frac{3}{2}\right) \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots ⑤$$

と表される。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ に代入すると

$$-11t(-11t-5) + (5t+6)(5t-1) + \left(4t+\frac{3}{2}\right)\left(4t-\frac{7}{2}\right) = 0$$

$$162t^2 + 72t - \frac{45}{4} = 0$$

$$18t^2 + 8t - \frac{5}{4} = 0 \quad \therefore t = \frac{-8 \pm \sqrt{154}}{36}$$

⑤に代入して、条件を満たすPの座標は

$$\left(\frac{88 \mp 11\sqrt{154}}{36}, \frac{176 \pm 5\sqrt{154}}{36}, \frac{11 \pm 2\sqrt{154}}{18} \right) \text{ (複号同順)}$$

(答)