

図チャレ 第 267 回 (2023 年 12 月)

xyz 空間において, 定点 $A(-1, 0, 0)$ を円 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 上の動点 B があり, 線分 AB を一辺とする正方形 $ABCD$ を xy 平面に垂直に立てる。

- (1) 正方形 $ABCD$ が通過してできる立体の体積 V を求めよ。
- (2) 辺 BC が通過してできる領域の面積 S を求めよ。

解答

- (1) xz 平面 ($y = 0$) に関して対称であるから, 点 B が $y \geq 0$ にあるときを考えて 2 倍すればよい。

$\angle OAB = \theta$ とおくと, 円周角の性質より

$$B(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

θ の微小変化量 $\Delta\theta$ に対して線分 AB が通過する範囲は半径 $AB = 2 \cos \theta$, 中心角 $\Delta\theta$ の扇形で近似されるから, 微小体積 ΔV は

$$\Delta V \div \frac{1}{2}(2 \cos \theta)^2 \Delta\theta \cdot 2 \cos \theta = 4 \cos^3 \theta \Delta\theta$$

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta} = 4 \cos^3 \theta$$

正方形 $ABCD$ が通過してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^3 \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \sin 3\theta + 3 \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) = \frac{16}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) 点 $(1, 0)$ から点 B が動いた道のりは 2θ であるから,

$$t = 2\theta, \quad f(t) = 2 \cos \theta$$

とおくことにより, 辺 BC が通過してできる領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi} f(t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\theta) \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \cdot (2\theta)' d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 8 \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

