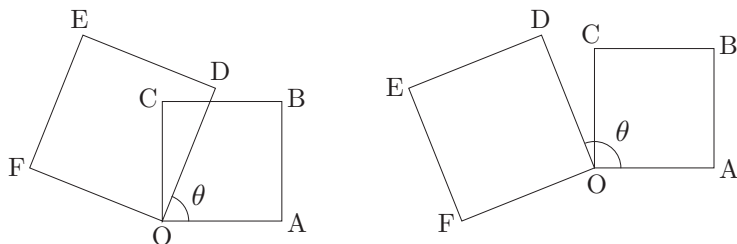


図チャレ 第 268 回 (2024 年 1 月)

同一平面上に正方形 $OABC$ と正方形 $ODEF$ がある。2 つの正方形が (頂点 O を共有しながら) どのように配置されても, 三角形 OAF と三角形 OCD は面積が等しいことを示せ。

コメント: 初等幾何の有名問題のようですが, 高校数学の知識を用いればもっと簡単に解けそうです。是非とも 2 通り以上の解法を考えてみてください

解答



O, A, B, C および O, D, E, F は反時計まわりに並んでいるとしてよい。

$\angle AOD = \theta$ とおくと,

$$\angle AOF = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad \angle COD = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{または } \angle AOF = \frac{3}{2}\pi - \theta, \quad \angle COD = \theta - \frac{\pi}{2}$$

であり, いずれの場合も

$$\angle AOF + \angle COD = \pi$$

である。補角の公式より

$$\sin \angle AOF = \sin \angle COD$$

であるから, $OA = OC$ および $OF = OD$ も考えて,

$$\triangle OAF = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OF \cdot \sin \angle AOF = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD = \triangle OCD$$

(証明おわり)

[初等幾何による解法]

点 O に関して点 A と対称な点を G とする。頂点 F から直線 OA におろした垂線の長さを h とすると

$$\triangle OAF = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot h = \frac{1}{2} \cdot OG \cdot h = \triangle OGF$$

$\triangle OGF$ を O を中心に時計まわりに 90° 回転させると $\triangle OCD$ に重なるから,

$\triangle OGF$ と $\triangle OCD$ の面積は等しい。

したがって, $\triangle OAF$ と $\triangle OCD$ の面積は等しい。

(証明おわり)