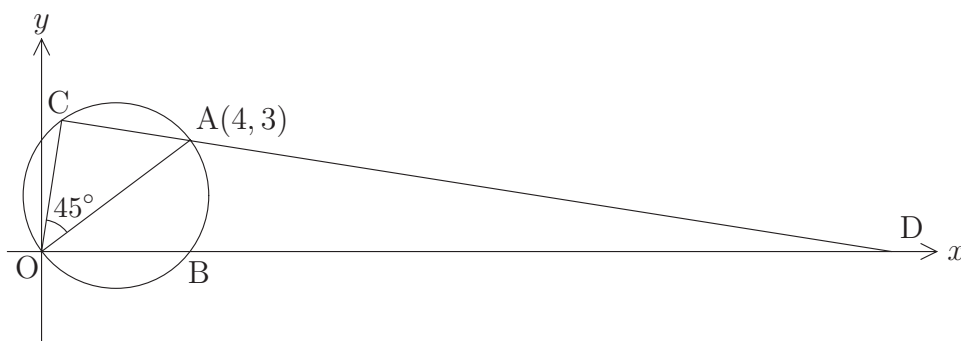


## 図チャレ 第 269 回 (2024 年 2 月)

$xy$  平面上に 2 点  $O(0,0)$ ,  $A(4,3)$  を直径の両端とする円がある。図のようにこの円と  $x$  軸との原点以外の交点を  $B$ , 線分  $OA$  に関して  $B$  と反対側の円周上に  $\angle COA = 45^\circ$  を満たす点  $C$  をとり, 線分  $CA$  の延長線と  $x$  軸との交点を  $D$  とする。以下の問いに答えよ。



- (1)  $\triangle AOD$  の外心を  $P$  として,  $\angle OPD$  の大きさを求めよ。
- (2) 点  $D$  の座標を求めよ。
- (3)  $\triangle AOD$  の外接円の方程式を求めよ。
- (4)  $\angle AOB$  の二等分線と線分  $AD$  の交点を  $E$  とし,  $\overrightarrow{OE}$  を成分表示せよ。

出典：2014 年 豊橋技術科学大学

### 解答

- (1)  $\angle OAD = \angle AOC + \angle ACO = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$   
 $\triangle AOD$  の外接円上に点  $Q$  を, 直線  $OD$  に関して  $A$  とは反対側に (任意に) とると,  
 $\angle OQD = 180^\circ - \angle OAD = 45^\circ$   
 $\therefore \angle OPD = 2\angle OQD = 90^\circ$  (答)
- (2)  $OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  であり,  $\triangle OAC$  は直角二等辺三角形であるから,  
 $OC = AC = \frac{5}{\sqrt{2}}$   
 $A(4, 3), \angle OBA = 90^\circ$  より  
 $B(4, 0)$

$\angle OCD = \angle ABD = 90^\circ$  より

$\triangle OCD \sim \triangle ABD$ ,  $OC : CD = AB : BD$

であるから,

$$D(d, 0) \quad (d > 0)$$

とおくと

$$\frac{5}{\sqrt{2}} : \sqrt{d^2 - \frac{25}{2}} = 3 : (d - 4)$$

$$9\left(d^2 - \frac{25}{2}\right) = \frac{25}{2}(d - 4)^2$$

$$9(2d^2 - 25) = 25(d - 4)^2$$

$$7d^2 - 200d + 25^2 = 0$$

$$(d - 25)(7d - 25) = 0$$

$d > 4$  (かつ  $d^2 > \frac{25}{2}$ ) より

$$d = 25 \quad \therefore D(25, 0) \quad (\text{答})$$

(別解)  $\angle OBA = 90^\circ$  であるから,  $\angle AOB = \theta$  とおくと

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$\angle COD = \theta + 45^\circ$  より

$$\begin{aligned} OD &= \frac{OC}{\cos(\theta + 45^\circ)} = \frac{OC}{\cos \theta \cos 45^\circ - \sin \theta \sin 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 25 \end{aligned}$$

(3) (1)より, 外心 P は  $y < 0$  の範囲にあり,  $\triangle OPD$  は OD を斜辺とする直角二等辺三角形であるから,

$$P\left(\frac{25}{2}, -\frac{25}{2}\right), \quad OP = \frac{25}{\sqrt{2}}$$

$\triangle AOD$  の外接円の方程式は

$$\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{2} \quad (\text{答})$$

(4) 角の二等分線の性質より

$$AE : ED = OA : OD = 5 : 25 = 1 : 5$$

分点公式より

$$\overrightarrow{OE} = \frac{5\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{1 + 5} = \frac{5}{6}(4, 3) + \frac{1}{6}(25, 0) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad (\text{答})$$