

図チャレ 第 270 回 (2024 年 3 月)

一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において、辺 AD 上の点 E、辺 DC 上の点 F、辺 CA 上の点 G、辺 BC 上の点 H を $AE = DF = CG = 2t$ 、 $BH = t$ となるようにとる。ただし、 $0 \leq t \leq 1$ とする。

(1) $\triangle EFG$ の面積は

$$\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \left(\boxed{\text{イ}} t^2 + \boxed{\text{ウ}} t + \boxed{\text{エ}} \right)$$

である。

(2) B から平面 ACD に垂線を下ろし、平面 ACD との交点を P とするとき、

$$BP = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

(3) H から平面 EFG に垂線を下ろし、平面 EFG との交点を Q とするとき、

$$HQ = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} (t + \boxed{\text{サ}})$$

である。

(4) 四面体 HEFG の体積が最小になるのは

$$t = \boxed{\text{シ}} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

のときである。

出典：2024 年 上智大学

解答

(1) $\triangle EFG$ の面積は

$$\begin{aligned} & \triangle ACD - \triangle AGE - \triangle CFG - \triangle DEF \\ &= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin 60^\circ \times \{1 - t(1-t) \times 3\} \\ &= \sqrt{\boxed{3}} \left(\underset{\text{(ア)}}{\boxed{3}} t^2 + \underset{\text{(イ)}}{\boxed{-3}} t + \underset{\text{(エ)}}{\boxed{1}} \right) \end{aligned}$$

(2) ABCD は正四面体であるから、B から面 ACD に下ろした垂線の足 P は正三角形

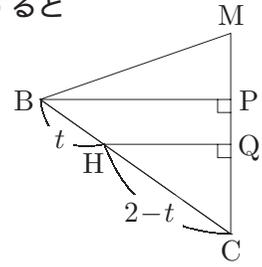
ACD の外心，したがって重心である。AD の中点を M とすると

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$PM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 BPM に三平方の定理を適用すると

$$BP = \sqrt{BM^2 - PM^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \sqrt{\boxed{6}} \quad \begin{matrix} \text{(オ)} \\ \text{(キ)} \\ \text{(カ)} \end{matrix}$$



(3) $\triangle BPC \sim \triangle HQC$ であるから

$$HQ = \frac{HC}{BC}BP = \frac{2-t}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{6} = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}} \sqrt{\boxed{6}} \left(t + \frac{\boxed{-2}}{\boxed{サ}} \right) \quad \begin{matrix} \text{(ク)} \\ \text{(コ)} \\ \text{(ケ)} \end{matrix}$$

(4) 四面体 HEFG の体積 $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} (3t^2 - 3t + 1) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} (-t + 2)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} (-3t^3 + 9t^2 - 7t + 2)$$

$$V'(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} (-9t^2 + 18t - 7)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \{-9(t-1)^2 + 2\}$$

$$= -3\sqrt{2} \left\{ (t-1)^2 - \frac{2}{9} \right\}$$

$0 < t < 1$ において

$$V'(t) < 0 \iff (t-1)^2 > \frac{2}{9} \iff t-1 < -\frac{\sqrt{2}}{3} \iff t < 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

であるから， $0 \leq t \leq 1$ における $V(t)$ の増減は

t	0	$1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$	1
$V'(t)$	-	0	+
$V(t)$	\searrow	極小	\nearrow

よって，四面体 HEFG の体積 $V(t)$ が最小になるのは

$$t = \boxed{1} + \frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}} \sqrt{\boxed{2}} \quad \begin{matrix} \text{(ス)} \\ \text{(シ)} \\ \text{(セ)} \\ \text{(ソ)} \end{matrix}$$

のときである。