

図チャレ 第 271 回 (2024 年 4 月)

複素数平面上に $|\alpha| = 2$ を満たす点 $A(\alpha)$ がある。方程式

$$|z - 1| = \sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

$$|z - \alpha| = \sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

について，次の問に答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z の全体が表す図形を描け。また，方程式 ① および ② を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ。

- (2) 方程式 ① および ② を満たす複素数 z について

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

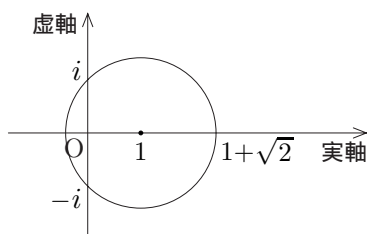
が成り立つことを示せ。

- (3) 方程式 ① および ② を満たす異なる 2 つの複素数を β, γ とする。2 点 $B(\beta), C(\gamma)$ と原点 O が一直線上にあることを示せ。また， $|\beta| = b$ とおくととき， $|\gamma|$ を b を用いて表せ。

出典：2024 年 佐賀大学

解答

- (1) $|z - 1| = \sqrt{2}$ を図示すると



(答)

$|\alpha| = 2$ より

$$1 \leq |\alpha - 1| \leq 3$$

であり，

$$\begin{aligned} 1^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 &= 2\sqrt{10} - 6 = 2(\sqrt{10} - \sqrt{9}) > 0 \\ (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 3^2 &= 2\sqrt{10} - 2 = 2(\sqrt{10} - 1) > 0 \end{aligned}$$

より

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

であるから，円 $|z - 1| = \sqrt{2}$ と円 $|z - \alpha| = \sqrt{5}$ は 2 点で交わる。したがって，① および ② を満たす複素数は 2 個ある。 (証明おわり)

(2) ①を書き換えると

$$|z - 1|^2 = 2$$

$$(z - 1)(\bar{z} - 1) = 2$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} - 1 = 0 \quad \dots\dots ①'$$

②を書き換えると

$$|z - \alpha|^2 = 5$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 5$$

$$z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - 5 = 0 \quad \dots\dots ②'$$

①' - ②' より

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) - \alpha\bar{\alpha} + 4 = 0$$

ここで, 仮定より $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 2^2 = 4$ であるから,

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0 \quad (\text{証明おわり})$$

(3) β, γ は ① および ② を満たすから, (2) より

$$\bar{\beta}(\alpha - 1) + \beta(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

$$\bar{\gamma}(\alpha - 1) + \gamma(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$ は

$$\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha} - 1} = -\frac{z}{\alpha - 1}$$

と書けて,

$$z \perp (\alpha - 1)$$

であることを意味するから, 点 β, γ はともに原点を通る $\alpha - 1$ と垂直な直線上にある。特に, $O(0), B(\beta), C(\gamma)$ は同一直線上にある。

$D(i), E(-i)$ とおくと, 原点に関する円 $|z - 1| = \sqrt{2}$ の方べきを考えると

$$OB \cdot OC = OD \cdot OE$$

が成り立つから,

$$|\beta||\gamma| = 1 \times 1$$

$|\beta| = b$ とおくと

$$|\gamma| = \frac{1}{b} \quad (\text{答})$$