

図チャレ 第 272 回 (2024 年 5 月)

a, b, d を正の実数とし, xy 平面上の点 $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(b,0)$, $D(0,d)$ が次の条件をすべて満たすとする。

$$\angle OAD = 15^\circ, \quad \angle OBD = 75^\circ, \quad AB = 6$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ。
- (2) a, b, d の値を求めよ。
- (3) 2 点 O, D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また, 線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき, 方べきの定理

$$AP \cdot AD = AO^2, \quad BQ \cdot BD = BO^2$$

を示せ。

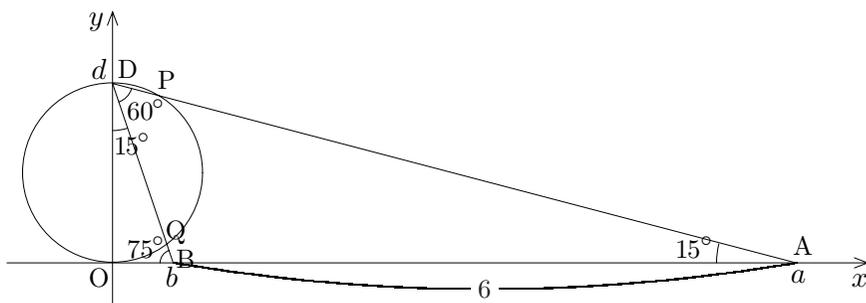
- (4) (3) の点 P, Q に対し, 積 $AP \cdot BQ$ の値を求めよ。

出典: 2024 年 東北大学

解答

- (1) 加法定理を用いて

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 余角の公式より

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

であるから, (1)の結果とあわせて

$$d = a \tan 15^\circ = b \tan 75^\circ$$

$$(2 - \sqrt{3})a = (2 + \sqrt{3})b$$

$$\therefore b = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}a = (2 - \sqrt{3})^2 a = (7 - 4\sqrt{3})a$$

$a - b = 6$ より

$$a - (7 - 4\sqrt{3})a = (4\sqrt{3} - 6)a = 6$$

$$\therefore a = \frac{6}{4\sqrt{3} - 6} = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = 3 + 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

$$b = (2 - \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

$$d = a \tan 15^\circ = \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(3) OD は直径であるから

$$\angle OPD = 90^\circ$$

したがって, 直角三角形の相似

$$\triangle AOD \quad \triangle APO$$

が成り立つから,

$$AO : AD = AP : AO \quad \therefore AP \cdot AD = AO^2$$

B についても同様に

$$BQ \cdot BD = BO^2$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(4) (3)より

$$AP = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}, \quad BQ = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + d^2}}$$

(2)より

$$a^2 + d^2 = 3\{(2 + \sqrt{3})^2 + 1\} = 3(8 + 4\sqrt{3}) = 6(\sqrt{3} + 1)^2,$$

$$b^2 + d^2 = 3\{(2 - \sqrt{3})^2 + 1\} = 6(\sqrt{3} - 1)^2$$

であるから

$$AP = \frac{3(2 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3(4 + 2\sqrt{3})^2}{4\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)^3}{4\sqrt{2}},$$

$$BQ = \frac{3(2 - \sqrt{3})^2}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)^3}{4\sqrt{2}}$$

$$\therefore AP \cdot BQ = \frac{3 \times (3 - 1)^3}{(4\sqrt{2})^2} = \frac{3}{4} \quad (\text{答})$$