

図チャレ 第 273 回 (2024 年 6 月)

半径 1 の円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ を考える。線分 A_1A_4 と A_2A_5 の交点を B とし、 $\triangle A_1A_2B$ は正三角形であるとする。また、 $A_3A_2 = A_3A_4$ とする。 $a = A_1A_2$, $b = A_4A_5$ とおく。

- (1) 線分 A_3B の長さを求めよ。
- (2) b を a を用いて表せ。
- (3) 五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 S を a を用いて表し、 S の最大値を求めよ。

出典：2024 年 京都府立医科大学

解答

- (1) $\triangle A_1A_2A_4$ において正弦定理より

$$\frac{A_2A_4}{\sin 60^\circ} = 2 \times 1 \quad \therefore A_2A_4 = \sqrt{3}$$

$A_2A_3 = A_3A_4$ より

$$\angle A_2A_1A_3 = \angle A_3A_1A_4 = 30^\circ$$

であるから、線分 A_1A_3 は線分 A_2B の垂直二等分線であり、

$$A_2A_3 = A_3B$$

四角形 $A_1A_2A_3A_4$ は円に内接するから

$$\angle A_2A_3A_4 = 180^\circ - \angle A_2A_1A_4 = 120^\circ$$

二等辺三角形 $A_2A_3A_4$ に注目して

$$A_2A_3 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} A_2A_4 \quad \therefore A_3B = A_2A_3 = \frac{A_2A_4}{\sqrt{3}} = 1 \quad (\text{答})$$

- (2) 円周角の性質より

$$\angle A_1A_4A_5 = \angle A_1A_2A_5 = \angle A_1A_2B = 60^\circ$$

$$\angle A_2A_5A_4 = \angle A_2A_1A_4 = \angle A_2A_1B = 60^\circ$$

であるから、 $\triangle A_4A_5B$ も正三角形である。 $\triangle A_2BA_4$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} A_2A_4^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= a^2 + ab + b^2 \end{aligned}$$

- (1) で導いたように $A_2A_4 = \sqrt{3}$ であったから

$$a^2 + ab + b^2 = 3$$

$$b^2 + ab + (a^2 - 3) = 0$$

$b > 0$ を考えて

$$b = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(a^2 - 3)}}{2} = \frac{-a + \sqrt{3(4 - a^2)}}{2} \quad (\text{答})$$

(3) $\triangle A_1BA_5 \equiv \triangle A_2BA_4$, $A_2A_3 = A_3A_4 = A_3B = 1$, $a^2 + ab + b^2 = 3$ であることに注意すると, 五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ \times 2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + ab) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-a^2 + a\sqrt{3(4-a^2)}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-a^2 + \sqrt{3}a\sqrt{4-a^2} + 7) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

ここで,

$$f(a) = -a^2 + \sqrt{3}a\sqrt{4-a^2} + 7 \quad (0 < a < 2)$$

とくと,

$$\begin{aligned} f'(a) &= -2a + \sqrt{3}\sqrt{4-a^2} + \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-a^2}} \cdot (-2a) \\ &= \frac{-2a\sqrt{4-a^2} + \sqrt{3}(4-a^2) - \sqrt{3}a^2}{\sqrt{4-a^2}} \\ &= 2 \cdot \frac{-a\sqrt{4-a^2} + \sqrt{3}(2-a^2)}{\sqrt{4-a^2}} \end{aligned}$$

$0 < a < 2$ において

$$\begin{aligned} f'(a) > 0 &\iff \sqrt{3}(2-a^2) > a\sqrt{4-a^2} \\ &\iff 2-a^2 > 0 \text{ かつ } 3(2-a^2) > a^2(4-a^2) \\ &\iff 0 < a^2 < 2 \text{ かつ } a^4 - 7a^2 + 6 = (a^2-1)(a^2-6) > 0 \\ &\iff 0 < a^2 < 1 \\ &\iff 0 < a < 1 \end{aligned}$$

であるから, $f(a)$ の増減は

a	(0)	1	(2)
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$		↗ 極大 ↘	

よって, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}f(a)$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}f(1) = \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

である。