

図チャレ 第 274 回 (2024 年 7 月)

座標空間において，球 $S : (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$ を x 軸を含む平面 α で切断する。 S およびその内部で α の上側 (z 軸の正の方向) にある部分の体積を K_U ，下側にある部分の体積を K_D とする。ただし，体積は切り口も含めて考える。このとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 α が点 $P(4, 4, 2)$ を通るとき， α と球 S が交わってできる円の半径を求めよ。
- (2) (1) のときの K_D を求めよ。
- (3) $\frac{K_U}{K_D} = \frac{5}{27}$ を満たし，かつ α は平面 $y = 5$ 上の点 Q を通るとき，点 Q の z 座標を求めよ。

出典：2024 年 福井大学

解答

- (1) 平面 α の方程式は， xz 平面でないならば

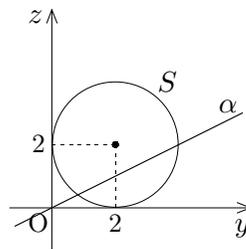
$$z = ky \quad (k \text{ は定数})$$

と表され，点 $P(4, 4, 2)$ を通るとき

$$2 = k \cdot 4 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

よって，平面 α の方程式は

$$z = \frac{1}{2}y$$



球 S の中心 $(2, 2, 2)$ から平面 α に下ろした垂線の長さは，平面 $x = 2$ 上で点 $(2, 2, 2)$ と直線 $y - 2z = 0$ (平面との交線) との距離のことであるから，

$$\frac{|2 - 2 \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

α と S の交円の半径は

$$\sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

- (2) K_D は $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$ かつ $z \leq \frac{1}{2}y$ で表される領域の体積であり，

り，数量的には球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ の $x \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$ の部分の体積と等しいから，

$$\begin{aligned} K_D &= \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^2 \pi(4 - x^2) dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left\{ 4 \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{3} \left(8 - \frac{8}{5\sqrt{5}} \right) \right\} \\
&= \pi \left(\frac{24-8}{3} - \frac{120-8}{15\sqrt{5}} \right) \\
&= \frac{16}{3} \left(1 - \frac{7}{5\sqrt{5}} \right) \pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(3) 点 Q の x 座標を 0 としても題意は変わらないから,

$$Q(0, 5, q) \quad (q > 5)$$

とおくことができる。このとき

$$\alpha : qy - 5z = 0$$

S の中心と α との距離 d は

$$d = \frac{|q \cdot 2 - 5 \cdot 2|}{\sqrt{q^2 + (-5)^2}} = \frac{2|q-5|}{\sqrt{q^2+25}}$$

$\frac{K_U}{K_D} = \frac{5}{27}$ となるのは, $q > 5$ かつ

$$\begin{aligned}
K_U &= \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \times \frac{5}{32} = \int_d^2 \pi(4-x^2) dx \\
&= \pi \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_d^2 \\
&= \pi \left\{ 4(2-d) - \frac{1}{3}(8-d^3) \right\}
\end{aligned}$$

のときであり,

$$12(2-d) - (8-d^3) = 5$$

$$d^3 - 12d + 11 = 0$$

$$(d-1)(d^2+d-11) = 0$$

$0 < d < 2$, $0^2+0-11 < 0$, $2^2+2-11 < 0$ より

$$d = \frac{2|q-5|}{\sqrt{q^2+25}} = 1$$

$$4(q-5)^2 = q^2 + 25$$

$$3q^2 - 40q + 75 = 0 \quad \therefore q = \frac{20 \pm 5\sqrt{7}}{3}$$

$q > 5$ を考えて, 点 Q の z 座標 q は

$$q = \frac{20 + 5\sqrt{7}}{3} \quad (\text{答})$$