

図チャレ 第275回(2024年8月)

2 曲線 $y = \log x$, $y = -\frac{1}{4x}$ の両方に接する直線の本数を求めよ。

解答

$x = t$ における曲線 $y = \log x$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t \quad \dots\dots ①$$

$x = u$ における曲線 $y = -\frac{1}{4x}$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{4u^2}(x - u) - \frac{1}{4u} \quad \dots\dots ②$$

①と②が同一直線になるとき

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{1}{4u^2} & \dots\dots ③ \\ -1 + \log t = -\frac{1}{2u} & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③より

$$t = 4u^2$$

であり, ④に代入して t を消去すると

$$\log 2|u| + \frac{1}{4u} - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots ⑤$$

となるから, ⑤を満たす 0 でない実数 u の個数が求める共通接線の本数である。

$$f(u) = \log 2u + \frac{1}{4u} - \frac{1}{2} \quad (u > 0)$$

とおくと,

$$f'(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{4u^2} = \frac{4u - 1}{4u^2}$$

u	(0)	$\frac{1}{4}$	(∞)
$f'(u)$	-	0	+
$f(u)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\lim_{u \rightarrow +0} f(u) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{1}{2u} \left(2u \log 2u + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \infty$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{e}{4} < 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$$

であるから, $f(u) = 0$ を満たす正の実数 u は 2 つ存在する。

$$g(u) = \log(-2u) + \frac{1}{4u} - \frac{1}{2} \quad (u < 0)$$

とおくと,

$$g'(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{4u^2} < 0$$

より、 $g(u)$ は狭義単調減少である。

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \infty,$$

$$\lim_{u \rightarrow -0} g(u) = \lim_{v \rightarrow +0} \frac{1}{2v} \left(2v \log 2v - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = -\infty$$

であるから、 $g(u) = 0$ を満たす負の実数 u はただ 1 つ存在する。

よって、曲線 $y = \log x$ と $y = -\frac{1}{4x}$ の両方に接する直線は

3 本 (答)

存在する。