

図チャレ 第277回(2024年10月)

座標平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ があり, y 軸上 $y > 0$ の部分に点 P がある。
 $\angle APB$ が最大となるような点 P の座標を求めよ。

解答

$\angle APB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $P(0, y)$ ($y > 0$) とおくと,

$$\overrightarrow{PA} = (1, -y), \quad \overrightarrow{PB} = (2, -y),$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{2 + y^2}{\sqrt{1 + y^2} \sqrt{4 + y^2}}$$

$y^2 = t$ ($t > 0$) とおき, 相加・相乗平均の不等式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{(1+t)(4+t)}{(2+t)^2} \\ &= \frac{t^2 + 5t + 4}{t^2 + 4t + 4} \\ &= 1 + \frac{t}{t^2 + 4t + 4} \\ &= 1 + \frac{1}{t + \frac{4}{t} + 4} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 4} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ここで, 不等式の等号は

$$t = \frac{4}{t} > 0 \quad \text{すなわち} \quad t = 2$$

のとき成り立つから,

$y = \sqrt{2}$ のとき $\cos \theta$ は最小, $\theta = \angle APB$ は最大

となる。よって, 求める点の座標は

$$P(0, \sqrt{2}) \quad (\text{答})$$

(別解) 3点 A, B, P を通る円を考えると, $\angle APB$ は劣弧 AB に対する円周角である。この円が小さくなるほど $\angle APB$ は大きくなるから,

2点 A, B を通る円と y 軸の接点に

点 P があるとき $\angle APB$ は最大

となる。このとき, 方べきの定理より

$$OP^2 = OA \cdot OB = 1 \times 2$$

点 P は y 軸上で y 座標が正であるから, 求める座標は

$$P(0, \sqrt{2}) \quad (\text{答})$$

