

図チャレ 第278回(2024年11月)

一辺の長さが1である正四面体OABCにおいて、辺OAの中点をD、辺OBを2:1に内分する点をE、辺OCを2:1に外分する点をFとする。3点D, E, Fを通る平面を α とすると、 α と辺ACとの交点をP、 α と辺BCとの交点をQとする。

- (1) DP:PF および EQ:QF を求めよ。
 (2) 正四面体OABCを平面 α で2つに分けると、頂点Oを含む方の立体の体積Vを求めよ。

解答

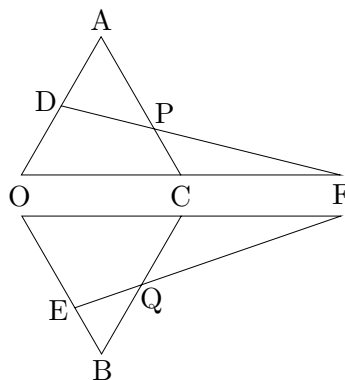
- (1) メネラウスの定理より

$$\frac{DP}{PF} \cdot \frac{FC}{CO} \cdot \frac{OA}{AD} = \frac{DP}{PF} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{EQ}{QF} \cdot \frac{FC}{CO} \cdot \frac{OB}{BE} = \frac{EQ}{QF} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

であるから、

$$DP:PF = 1:2, \quad EQ:QF = 1:3 \quad (\text{答})$$



- (2) 正四面体は、立方体の4頂点を結んでできるから、
 正四面体OABCの体積 V_1 は

$$V_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{6} \times 4\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

四面体ODEFの体積を V_2 とする。四面体OABFの体積は $2V_1$ であり、

$$V_2 = 2V_1 \times \frac{\triangle ODE}{\triangle OAB} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9\sqrt{2}}$$

求める体積Vは

$$V = V_2 \left(1 - \frac{PF}{DF} \cdot \frac{QF}{EF} \cdot \frac{CF}{OF}\right)$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{2}} \times \left(1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

- (注) 正四面体は値を出すためのものであり、題意の本質ではない。一般の四面体OABCに対して、題意の平面 α で分けた2つの部分のうち、頂点Oを含む立体OCPDEQの体積は四面体OABCの $\frac{1}{2}$ 倍となる。