

図チャレ 第 279 回 (2024 年 12 月)

座標空間において, xy 平面上の円 $x^2 + y^2 \leq 1$ を底面として点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。

- (1) C の側面と平面 $z = x - t$ ($-1 < t < 1$) との交線を xy 平面に正射影して得られる曲線の方程式を求めよ。
- (2) C の平面 $z = x - t$ ($-1 < t < 1$) による切り口の面積 $S(t)$ を t の式で表せ。
- (3) C の $0 \leq z \leq x$ にある部分の体積 V を求めよ。

解答

- (1) C の側面を含む曲面の方程式は

$$x^2 + y^2 = (1 - z)^2$$

$z = x - t$ ($-1 < t < 1$) と連立して z を消去すると

$$x^2 + y^2 = (1 + t - x)^2$$

$$y^2 = (t + 1)^2 - 2(t + 1)x$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2(t+1)}y^2 + \frac{t+1}{2} \quad (\text{答})$$

- (2) C の平面 $z = x - t$ による切り口の xy 平面への正射影は, (1) で求めた曲線と直線 $x = t$ ($z = 0$) で囲まれた領域である。

$$-\frac{1}{2(t+1)}y^2 + \frac{t+1}{2} - t = \frac{y^2 - (t+1)^2 + 2t(t+1)}{-2(t+1)} = \frac{y^2 - (1-t^2)}{-2(t+1)}$$

を考えると, 正射影領域の面積は

$$\begin{aligned} S(t) \times \cos \frac{\pi}{4} &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \left\{ -\frac{1}{2(t+1)}y^2 + \frac{t+1}{2} - t \right\} dy \\ &= -\frac{1}{2(t+1)} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (y + \sqrt{1-t^2})(y - \sqrt{1-t^2}) dy \\ &= \frac{1}{2(t+1)} \cdot \frac{1}{6} (2\sqrt{1-t^2})^3 \\ &= \frac{2}{3} (1-t) \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

$$\therefore S(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} (1-t) \sqrt{1-t^2} \quad (\text{答})$$

- (3) $t \geq 0$ のとき, 平面 $z = x - t$ と原点との距離 u は $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ であるから, C の $0 \leq z \leq x$ にある部分の体積 V は

$$V = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(t) du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{3} (1-t) \sqrt{1-t^2} \frac{du}{dt} dt \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-t) \sqrt{1-t^2} dt \\
&= \frac{2}{3} \left(\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} (1-t^2)' dt \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$