

図チャレ 第280回(2025年1月)

一辺の長さ2の正三角形ABCの3頂点を通る円に内接し、正三角形ABCに外接する3つの円の中心を結んでできる正三角形の一辺の長さを求めよ。

解答

3点A, B, Cを通る円(三角形ABCの外接円)にAの直径対点A'において内接し、辺BCと接する円の中心をDとする。同様に、Bの直径対点B'およびCの直径対点C'で接する円の中心をそれぞれE, Fとする。また、正三角形ABCの重心(外心)をG、辺BCの中点をMとする。

正弦定理より

$$AG = A'G = \frac{2}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

AG : GM = 2 : 1であるから

$$GM = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad DM = A'D = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore DG = DM + GM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

同様の手順により $DG = EG = FG$ となるから、Gは正三角形DEFの外心でもある。相似比を考えることにより、正三角形DEFの一辺の長さは

$$2 \times \frac{DG}{AG} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

