

## 図チャレ 第 281 回 (2025 年 2 月)

四面体 ABCD がある。線分 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S がある。点 P, Q, R, S は同一平面上にあり、四面体のどの頂点とも異なるとする。

- (1) PQ と RS が平行であるとき、等式  $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$  が成り立つことを示せ。
- (2) PQ と RS が平行でないとき、等式  $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$  が成り立つことを示せ。

出典：2015 年 埼玉大学 経済学部・教育学部

### 解答

題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= p\overrightarrow{AB} \quad (0 < p < 1), \\ \overrightarrow{AQ} &= (1-q)\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} \quad (0 < q < 1) \\ \overrightarrow{AR} &= (1-r)\overrightarrow{AC} + r\overrightarrow{AD} \quad (0 < r < 1) \\ \overrightarrow{AS} &= s\overrightarrow{AD} \quad (0 < s < 1)\end{aligned}$$

とおくことができるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (1-p-q)\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AS} = (1-r)\overrightarrow{AC} + (r-s)\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

と表される。

- (1)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  は 1 次独立であるから、PQ と RS が平行であるとき
- $$1-p-q=0 \quad \text{かつ} \quad r-s=0$$

である。このとき

$$\begin{aligned}\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{q}{1-q} \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1-s}{s} \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{1-s}{s} \\ &= 1\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明おわり)

- (2) PQ と RS が平行でないとき、(1)の考察において

$$1-p-q \neq 0 \quad \text{または} \quad r-s \neq 0$$

となるから、直線 PQ または直線 RS は直線 AC とある点 T で交わる。このとき、点 T は平面 PQRS と直線 AC の交点であるから、直線 PQ も直線 RS も直線 AC と T で交わる。

平面 ABC と平面 ACD 上でそれぞれメネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1, \quad \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1$$

辺々かけあわせることにより,

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(注) 実際に解いてみるとわかるが, ふつうは PQ と RS が平行であるかないかで分けるようとは思いつかない。余計な指示がなければ, PQ と AC が平行であるかないかで分ける方が論じやすい。図形的な直観では説明しづらいところを, ベクトルを用いれば簡単になることに気づかせる意図があったのかもしれない。2025 年となった今から思えば, ちょうどこの頃 (2015 年頃) からベクトルを極端に苦手とする人が増えてきたような気がする。