

## 図チャレ 第 282 回 (2025 年 3 月)

$t$  を実数とし, 座標空間の 3 点

$$A\left(\frac{t}{3}, t, t\right), \quad B(1, t+1, t+1), \quad C(t, t-1, t-2)$$

を考える。

- (1) 線分 BC が  $xy$  平面と共有点をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\text{夕}} \leq t \leq \boxed{\text{チ}}$$

であり, このとき共有点の座標を  $(p, q, 0)$  とすると

$$p = \frac{1}{3} \left( \boxed{\text{ツ}} t^2 + \boxed{\text{テ}} \right), \quad q = \frac{1}{3} \left( \boxed{\text{ト}} t + \boxed{\text{ナ}} \right)$$

である。

- (2) 3 点 A, B, C を通る平面を  $\alpha$  とする。  $\alpha$  上の  $\triangle ABC$  と  $xy$  平面が共有点をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\text{ニ}} \leq t \leq \boxed{\text{ヌ}}$$

である。  $t$  がこの範囲を動くとき,  $\alpha$  上の  $\triangle ABC$  と  $xy$  平面の共通部分の長さの最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

出典：2025 年 上智大学

### 解答

- (1) 線分 BC が  $xy$  平面と共有点をもつための条件は

$$(t+1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore \underbrace{\boxed{-1}}_{(\text{夕})} \leq t \leq \underbrace{\boxed{2}}_{(\text{チ})}$$

このとき, 共有点  $D(p, q, 0)$  は BC を  $t+1:2-t$  に内分するから,

$$\begin{aligned} (p, q, 0) &= \frac{2-t}{3}(1, t+1, t+1) + \frac{t+1}{3}(t, t-1, t-2) \\ &= \left( \frac{\underbrace{\boxed{1}}_{(\text{ツ})} t^2 + \underbrace{\boxed{2}}_{(\text{テ})}}{3}, \frac{\underbrace{\boxed{1}}_{(\text{ト})} t + \underbrace{\boxed{1}}_{(\text{ナ})}}{3}, 0 \right) \end{aligned}$$

- (2) (1) と同様に, 線分 CA が  $xy$  平面と共有点をもつための条件は

$$t(t-2) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq t \leq 2$$

線分 AB が  $xy$  平面と共有点をもつための条件は

$$t(t+1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 0$$

△ABC と  $xy$  平面と共有点をもつための条件は

$$\boxed{-1} \leq t \leq \boxed{2}$$

(ニ)                      (ヌ)

$0 \leq t \leq 2$  のとき, 線分 CA と  $xy$  平面の共有点 E は CA を  $2-t:t$  に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{t}{2}(t, t-1, t-2) + \frac{2-t}{2}\left(\frac{t}{3}, t, t\right) \\ &= \left(\frac{t^2+t}{3}, \frac{t}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

$-1 \leq t \leq 0$  のとき, 線分 AB と  $xy$  平面の共有点 F は AB を  $-t:t+1$  に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= (t+1)\left(\frac{t}{3}, t, t\right) - t(1, t+1, t+1) \\ &= \left(\frac{t^2-2t}{3}, 0, 0\right)\end{aligned}$$

△ABC と  $xy$  平面の共通部分は

$-1 \leq t \leq 0$  のとき線分 DF,  $0 \leq t \leq 2$  のとき線分 DE

である。

$$\begin{aligned}DF^2 &= \left(\frac{t^2+2}{3} - \frac{t^2-2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t+1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{(2t+2)^2 + (t+1)^2}{9} \\ &= \frac{5}{9}(t+1)^2 \quad (-1 \leq t \leq 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DE^2 &= \left(\frac{t^2+2}{3} - \frac{t^2+t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t+1}{3} - \frac{t}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{-t+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-t+2}{6}\right)^2 \\ &= \frac{5}{36}(t-2)^2 \quad (0 \leq t \leq 2)\end{aligned}$$

△ABC と  $xy$  平面の共通部分の長さは,  $t=0$  のとき

$$\text{最大値} \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \sqrt{\boxed{5}}$$

(ネ)                      (ハ)  
(ジ)

をとる。