

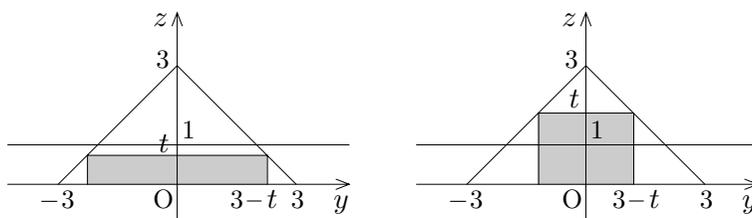
図チャレ 第 286 回 (2025 年 7 月)

xyz 平面において, 5 点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$, $P(0, 0, 1)$ をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。四面体 $ABCD$ を ℓ の周りに 1 回転させるとき, この四面体が通過する部分の体積 V を求めよ。ただし, 四面体は内部を含むものとする。

出典: 2025 年 熊本大学

解答

$0 \leq t \leq 3$ とするとき, 四面体 $ABCD$ の平面 $x = t$ による断面は



2 点 $(t, 3-t, 0)$, $(t, 0, 1)$ 間の距離は

$$\sqrt{(3-t-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 10}$$

2 点 $(t, 3-t, t)$, $(t, 0, 1)$ 間の距離は

$$\sqrt{(3-t-0)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 8t + 10}$$

(i) $0 \leq t < 1$ のとき

断面の長方形を ℓ のまわりに回転させると, 半径 $\sqrt{t^2 - 6t + 10}$ の円と半径 $1-t$ の円にはさまれた領域となるから, 回転体の断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi(t^2 - 6t + 10) - \pi(1-t)^2 = \pi(-4t + 9)$$

(ii) $1 \leq t \leq 3$ のとき

断面の長方形を ℓ のまわりに回転させると, $\sqrt{t^2 - 6t + 10}$ と $\sqrt{2t^2 - 8t + 10}$ のうち大きい方を半径とする円の周および内部となるが,

$$2t^2 - 8t + 10 - (t^2 - 6t + 10) = t(t-2)$$

を考えて, 回転体の断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \begin{cases} \pi(t^2 - 6t + 10) & (1 \leq t \leq 2) \\ \pi(2t^2 - 8t + 10) & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

四面体 $ABCD$ を ℓ のまわりに回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(t) dt \\ &= \pi \int_0^1 (-4t + 9) dt + \pi \int_1^2 (t^2 - 6t + 10) dt + \pi \int_2^3 (2t^2 - 8t + 10) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[-2t^2 + 9t \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 10t \right]_1^2 + \pi \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 10t \right]_2^3 \\
&= \pi \left\{ 7 + \frac{8-1}{3} - 3 \times (4-1) + 10 + \frac{2}{3} \times (27-8) - 4 \times (9-4) + 10 \right\} \\
&= \left(7 + \frac{7}{3} - 9 + 10 + \frac{38}{3} - 20 + 10 \right) \pi \\
&= 13\pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$