

図チャレ 第 290 回 (2025 年 11 月)

座標平面上で 2 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ が 2 点で交わり, その 2 交点が $x \geq 0$, $y \geq 0$ の範囲にあるような中心 $P(a, b)$ の存在し得る範囲を図示せよ。

解答

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$C_2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$2ax + 2by - (a^2 + b^2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

ここで $a = 0$ とすると, C_1 と C_2 の 2 交点は y 軸に関して対称であり, $x < 0$ の範囲に交点が存在することになるから不適である。また, $b = 0$ としても $y < 0$ の範囲に交点が存在することになって矛盾するから,

$$a \neq 0, \quad b \neq 0$$

であり, 特に ③ は直線の方程式を表す。

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \iff \textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{3}$$

であるから, C_1 と C_2 が 2 点で交わるための条件は, 円 ① と直線 ③ が 2 点で交わることと同値であり,

$$\frac{|2a \cdot 0 + 2b \cdot 0 - (a^2 + b^2)|}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} < 1$$

$$a^2 + b^2 < 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} < 2 \quad \therefore a^2 + b^2 < 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

このとき, C_1 と C_2 の 2 交点は円 ① と直線 ③ の 2 交点であるから, $x \geq 0$, $y \geq 0$ の範囲にあるための条件は, ③ の x 切片, y 切片が

$$\frac{a^2 + b^2}{2a} \geq 1, \quad \frac{a^2 + b^2}{2b} \geq 1$$

を満たすことである。このとき,

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

であり, $\frac{a^2 + b^2}{2a} \geq 1$ より

$$a^2 + b^2 \geq 2a \quad \therefore (a - 1)^2 + b^2 \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

同様に, $\frac{a^2 + b^2}{2b} \geq 1$ より

$$a^2 + (b - 1)^2 \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

以上より, 点 $P(a, b)$ の存在範囲は

$$\textcircled{4} \text{ かつ } \textcircled{5} \text{ かつ } \textcircled{6} \text{ かつ } \textcircled{7}$$

であり, 図示すると次図の網目部分である。ただし, 境界線上の点については, 実線部

は含み，白丸および破線部は含まない。

