

## 図チャレ 第 291 回 (2025 年 12 月)

双曲線  $H: x^2 - y^2 = 1$  上の点  $T\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right)$  において円  $C: (x-a)^2 + y^2 = r^2$  が  $H$  に接している。ただし,  $a, r, t$  は正の実数である。

- (1)  $a$  および  $r^2$  をそれぞれ  $t$  の式で表せ。
- (2)  $H$  と  $C$  の 2 つの接点と  $C$  の中心  $A(a, 0)$  を 3 頂点とする三角形が正三角形になるとき,  $t$  の値を求めよ。
- (3) (2) のとき,  $x \leq \frac{t^2+1}{2t}$  において  $H$  と  $C$  が囲む部分の面積を求めよ。

### 解答

- (1) 点  $T$  における双曲線  $H$  の接線の方程式は

$$\frac{t^2+1}{2t}x - \frac{t^2-1}{2t}y = 1$$

点  $T$  で円  $C$  とも接するから, 点  $T$  における双曲線  $H$  の法線

$$\frac{t^2-1}{2t}\left(x - \frac{t^2+1}{2t}\right) + \frac{t^2+1}{2t}\left(y - \frac{t^2-1}{2t}\right) = 0$$

は円  $C$  の中心  $A(a, 0)$  を通り,

$$\frac{t^2-1}{2t}\left(a - \frac{t^2+1}{2t}\right) + \frac{t^2+1}{2t}\left(0 - \frac{t^2-1}{2t}\right) = 0$$

$$\therefore a = \frac{t^2+1}{t} \quad (\text{答})$$

このとき, 円  $C$  の半径  $r$  は線分  $AT$  の長さに等しいから,

$$\begin{aligned} r^2 = AT^2 &= \left(\frac{t^2+1}{2t} - \frac{t^2+1}{t}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{2t} - 0\right)^2 \\ &= \frac{(t^2+1)^2 + (t^2-1)^2}{(2t)^2} \\ &= \frac{t^4+1}{2t^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2)  $H$  と  $C$  の 2 接点  $T, U$  を結ぶ線分の中点を  $M$  とすると, 三角形  $ATU$  が正三角形となるための条件は

$$AT = 2MT$$

であり,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{t^4+1}{2t^2} = \left(2 \cdot \frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \\ t^4+1 &= 2(t^2-1)^2 \\ t^4-4t^2+1 &= 0 \\ t^2 &= 2 \pm \sqrt{3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2} \end{aligned}$$

$t > 0$ であることも考えて,

$$t = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} \quad (\text{答})$$

(3) (2)のとき,  $H$ と $C$ の2接点は $x$ 軸に関して対称であることを考えると,  $x \leq a$ において $H$ と $C$ が囲む部分の面積 $S$ を求めるには

$$t = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

として差し支えない。このとき, (1)より

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{t^4 + 1}{2t^2} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 + 1}{2(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

円 $C$ の内部で $x \leq x_T$ の範囲にある弓形の面積 $S_1$ は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

双曲線 $H$ と直線 $x = \frac{t^2 + 1}{2t}$ で囲まれる部分の面積 $S_2$ を,  $x = \frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right)$ により置換積分して求めると,

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_1^{\frac{t^2+1}{2t}} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \\ &= 2 \int_1^t \sqrt{\frac{1}{4} \left( s + \frac{1}{s} \right)^2 - 1} \frac{dx}{ds} \, ds \\ &= 2 \int_1^t \frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \cdot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{s^2} \right) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_1^t \left( s - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^3} \right) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} s^2 - 2 \log s - \frac{1}{2s^2} \right]_1^t \\ &= \frac{1}{4} (t^2 - 1) - \log t - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( t^2 - \frac{1}{t^2} \right) - \log t \\ &= \frac{1}{4} \left( 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) - \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})\} - \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

求める面積  $S$  は

$$S = S_2 - S_1 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad (\text{答})$$